Il numero e di Nepero

(L.V., Nov. 2018)

In questo breve testo, vedremo una dimostrazione alternativa e molto elementare di alcune proprietà base del numero e. Mi sono parzialmente ispirato dagli appunti "Sul numero di Nepero" di Guglielmo Di Meglio, disponibili online.

Il punto di partenza è la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Osserviamo che

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

(b) Dimostriamo che $x_n < x_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Usando (a), otteniamo che

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = x_{n+1}. \end{aligned}$$

[q.e.d.]

(c) Dimostriamo che $2 < x_n < 3$ per ogni $n \geq 2$.

Dimostrazione. Da (b) segue immediatamente che $x_n > x_1 = 2$ per ogni $n \geq 2$. Per la seconda disuguaglianza, utilizzeremo (a):

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

[q.e.d.]

(d) Essendo la successione $\{x_n\}$ (strettamente) monotona e limitata, essa converge in $\mathbb{R}$. Denotiamo

$$e := \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad \text{(il } \textit{numero di Nepero}\text{)}.$$

(e) Da (b) e (c) segue immediatamente che $2 < e \leq 3$. Mostriamo ora che

$$e < 3\,.$$

Dimostrazione. Procediamo come in (c), con una maggiorazione più precisa. Per $n \geq 2$ abbiamo

$$x_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} < 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{k-2}}$$
$$= 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3^k} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{2}{3}} < 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{4}$$

e quindi $e \leq 2 + \frac{3}{4} < 3$. *[q.e.d.]*

(f) È noto che il numero e è irrazionale (addirittura trascendente) e, approssimativamente,

$$e \approx 2,718281828459045235\,.$$

(Il fatto che $e \notin \mathbb{Q}$ è un'applicazione standard della formula di Taylor con resto secondo Lagrange – si veda il libro di testo.)

(g) Infine vediamo una dimostrazione elementare (senza l'utilizzo degli sviluppi di Taylor) che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e\,.$$

Dimostrazione. La serie è a termini positivi e quindi regolare. Denotiamo

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{e} \quad s := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty} s_n\,.$$

Dalla dimostrazione di (c) abbiamo subito che $x_n < s_n < 3$ $(n \geq 2)$, e quindi $e \leq s < +\infty$.

D'altra parte, (a) implica che per qualsiasi $N < n$, entrambi numeri naturali,

$$x_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Passando ai limiti per $n \to +\infty$ (con N fissato), otteniamo che

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = s_N \quad (N \geq 2),$$

da cui segue che $e \geq s$. *[q.e.d.]*