Analisi Matematica 1
(corso del prof. *M. Tarallo*, L.T. in Matematica)
Registro delle esercitazioni (inclusi gli esercizi proposti)

L. Vesely, 2019–2020

01/10/2019 [2 ore: n. 1,2]

- Rappresentare graficamente le seguenti funzioni:
  - $x^{8/7}$, $x^{3/4}$, $x^{\sqrt{3}}$ (dimostrato che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$), $x^{3/5}$, $x^{-2/9}$;
  - $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $g(x) = -f(-x) + 1$;
  - $f(x) = |3^x - 1|$, $g(x) = 3^{|x|} - 1$, $h(x) = 3^{|x|-1}$, $k(x) = 3^{|x-1|}$.
- Siano
$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq 1, \\ x - 1 & \text{se } x > 1; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 & \text{se } x < -1, \\ 1 - x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$
  (i) Calcolare i valori della funzione $h = g \circ f$ (cioè, $h(x) = g(f(x))$) e rappresentarla graficamente.
  (ii) La funzione $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva?, iniettiva?
  (iii) $h(\mathbb{R}) = ?$, $h([0,2)) = ?$.
  (iv) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il numero n_α delle soluzioni dell'equazione $h(x) = \alpha$.
- **Esercizio per voi.** Fare lo stesso per la funzione $k = f \circ g$.
- **Esercizio per voi.** Dimostrare che i seguenti numeri reali non sono razionali:
$$\sqrt[3]{12}\,, \quad \log_2 10\,, \quad \log_{10} 2\,.$$
- **Esercizio per voi.** Grafico di $h(x) = \big[\sin|x| - 1\big]$, dove $[t]$ denota la *parte intera* del numero reale t, cioè,
$$[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq t\}\,.$$

03/10/2019 [2 ore: n. 3,4]

- Ripasso: la funzione $[x]$ e il suo grafico.

- Grafico di $h(x) = \big[\sin|x| - 1\big]$.

- $\log_a(x-1) > \log_a(2x+1) + 1$, dove $a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ è un parametro.

- Determinare l'insieme $F = \{x \in \mathbb{R}:\ x = -|t^2 - 4t|,\ -1 < t < 5\}$.

- Determinare l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{|t-3|}{|t-3|+1},\ t > 0\}$.

- Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ se e solo se entrambi $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ sono razionali.

- Siano $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \geq 2$. Dimostrare che:
$$\sqrt[k]{n} \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k]{n} \in \mathbb{N}\,.$$
Soluzione (traccia). Dobbiamo dimostrare l'implicazione $\Rightarrow$ (l'altra implicazione è ovvia). Supponiamo quindi che $\sqrt[k]{n}$ sia razionale, cioè,
$$\sqrt[k]{n} = \frac{a}{b} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{N}.$$
Allora
(1) $$b^k n = a^k\,.$$
Sia ora p un qualsiasi numero primo che divida n. Allora possiamo scrivere
$$n = p^x\,\widetilde{n}\,,\ a = p^\alpha\,\widetilde{a}\,,\ b = p^\beta\,\widetilde{b}\,,$$
dove $x \geq 1$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ sono numeri interi, e $\widetilde{n}, \widetilde{a}, \widetilde{b}$ sono interi non divisibili per p. Sostituendo nella (1) e confrontando le potenze di p si ottiene $\beta k + x = \alpha k$ da cui
$$1 \leq x = (\alpha - \beta)k \quad (\text{e quindi } \alpha - \beta \in \mathbb{N}).$$
Abbiamo così dimostrato che, nella fattorizzazione di n in fattori primi, la potenza di ogni suo divisore primo è un multiplo di k. Da ciò segue facilmente che $n = m^k$ per qualche $m \in \mathbb{N}$.
(Infatti, la decomposizione di n in fattori primi è del tipo $n = p_1^{y_1 k} \dots p_s^{y_s k}$ con $y_i \in \mathbb{N}$, da cui $n = (p_1^{y_1} \dots p_s^{y_s})^p$.)
Quindi $\sqrt[k]{n} = m \in \mathbb{N}$. *[q.e.d.]*

- Richiami sulla funzione $\arcsin x$.

- Grafici di:
$$f(x) = \sin(\arcsin x)\,, \quad g(x) = \arcsin(\sin x)\,.$$

- Grafici di:
$$\max\big\{f(x), g(x)\big\}\,, \quad \min\big\{f(x), g(x)\big\}\,.$$

- *Parte positiva* e *parte negativa* di un numero reale x :
$$x^+ := \max\{x, 0\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0; \end{cases}$$
$$x^- := -\min\{x, 0\} = \max\{-x, 0\} = (-x)^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$
Attenzione: entrambe x^+ e x^- sono ≥ 0.
Grafici di x^+, x^-.
Due proprietà utili:
$$x = x^+ - x^-\,, \quad |x| = x^+ + x^-\,.$$

08/10/2019 [2 ore: n. 5,6]

- Sia $\mathcal{P}(a, b, c)$ una proposizione (affermazione, proprietà) a proposito di numeri reali a, b, c. Dati tre insiemi A, B, C di numeri reali, scrivere la negazione della seguente affermazione $\mathcal{A}$:
$$\exists a \in A\,, \quad \forall b \in B\,, \quad \exists c \in C\ : \quad \mathcal{P}(a, b, c).$$
(*Soluzione.* $(\neg\mathcal{A})$: $\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ \forall c \in C :\ \neg\mathcal{P}(a, b, c).$)

- Tracciare il grafico di $f(x) = \big(2\sin(3x)\ - 1\big)^-$.

- Tracciare il grafico delle funzioni
$$f(x) = \max\{\ \sqrt{|2x-1|}\,, 3 - 2|x|\ \}\,, \qquad g(x) = \inf_{x \leq t} f(t)\,.$$

- **Esercizio per voi.** Si consideri l'intervallo $B = (0, 1]$ e la funzione
$$f(x) = \begin{cases} |3 - x^2| & \text{se } x \geq 0, \\ 2x + 3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$
Determinare gli insiemi $f(B)$ e $f^{-1}(B)$.

- Stabilire su quali dei seguenti intervalli la funzione $g(x) = x^2 + x + 2$ è invertibile, e per tali intervalli calcolare la corrispondente funzione inversa: $(1, +\infty)$, $[0, 1)$, $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale α risulta iniettiva la successione $x_n = \alpha n - [\alpha n]$ $(n \in \mathbb{N})$.

- Determinare estremo superiore ed inferiore ed eventuali massimo e minimo dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A = (0, \sqrt{2}], \quad B = (0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}, \qquad C = \mathbb{N},$$
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x = -n^2 + \tfrac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$
$$F = \{x \in \mathbb{R} : x = \tfrac{n-2}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

10/10/2019 [2 ore: n. 7,8]

- Determinare sup, inf, max (se esiste) e min (se esiste) dei seguenti insiemi:
  (a) $E = \{\frac{2n-1}{n} \cos(n\pi) \ : n \in \mathbb{N}\}$
  (b) $E = \{\frac{1}{n} + \cos(n\pi) \ : n \in \mathbb{N}\}$
  (c) $E = \{\frac{m}{n} : m \leq n,\ m, n \in \mathbb{N}\}$
  (d) $E = \{x \in \mathbb{Q} : [-2^x] = -3\}$
  (e) $E = \left\{\frac{4-3(-1)^n}{n^{(-1)^n} - 3(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (con a^{b^c} si intende $a^{(b^c)}$)
  (f) $E = \{\lambda \in \mathbb{R} :$ l'equazione $x^2 + 2x - 3 = \lambda$ non ha soluzioni reali$\}$
  (g) $E = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\pi - 3 \arcsin(x^2 - 2)} + \log_3 |x| > 0\}$
  (h) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, dove $E_n = [1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$.
  (i) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ e $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, dove $E_n = (-\infty, 1 + n^{-1}]$, $F_n = [\frac{1-n}{n}, n)$.

- Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{se } t > 1, \\ \log_2(-t) & \text{se } t < -1, \end{cases}$$

rappresentare graficamente la funzione

$$g(x) = \sup_{t \in I_x} f(t) \qquad \text{dove} \qquad I_x = \begin{cases} [0, x] & \text{per } x \geq 0, \\ [x, 0] & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

- **Esercizio per voi.** Fare lo stesso con la funzione
$$h(x) = \sup_{t\in(x,x+1)} f(t)$$
(dove f è come sopra).

- **Esercizio per voi.** Al variare di $a \in \mathbb{R}$, rappresentare graficamente la funzione
$$g(x) = \big|\, a + \arctan |x| \,\big|.$$
Determinare poi $\sup g(\mathbb{R})$ e stabilire se tale valore appartiene a $g(\mathbb{R})$.

15/10/2019 [2 ore: n. 9,10]

- *Ripasso.* Insiemi equipotenti (o della stessa cardinalità). Insiemi numerabili, loro proprietà, esempi.

- Dimostrare che $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.
(*Idea:* partire dalla funzione $\arctan x$.)

- Dimostrare formalmente che $(0, 1) \sim [0, 1)$.
(*Idea.* Considerare $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ e scrivere una corrispondenza biunivoca tra M e $M \cup \{0\}$. Estendere quest'ultima a una corrispondenza biunivoca tra i due intervalli.)

- Dimostrare che *se X è un insieme infinito e E è al più numerabile (cioè, finito o numerabile) allora*
$$X \cup E \sim X\,.$$
(*Idea.* Procedere come nell'esercizio precedente, sfruttando il fatto che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.)

- *Corollario.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ha la cardinalità del continuo.

- **L'insieme delle parti.** Dato un insieme X, con $\mathcal{P}(X)$ denotiamo l'*insieme delle parti* di X, cioè, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X (inclusi $\emptyset$ e X).
Sono noti i seguenti fatti.
  (a) Se $|X| = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, allora $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.
  Esercizio per voi. Dimostratelo usando l'induzione matematica!

(b) (*Teorema di Cantor*). Per ogni insieme X si ha che

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|,$$

cioè, X è equipotente ad un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$, e $X \not\sim \mathcal{P}(X)$. (Ne segue che *non esiste una cardinalità massimale.*)

- Dimostrazione del Teorema di Cantor.

- **Teorema.** $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ha la cardinalità del continuo.

  Idea della dimostrazione.
  Basta dimostrare che $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim [0,1)$. Si procede in due passi.
  1) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim S$ dove S è l'insieme delle successioni (sequenze ordinate infinite) di elementi di $\{0,1\}$.
  A un insieme $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ associamo la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da

  $$s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A, \\ 0 & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

  Ciò definisce una funzione biiettiva tra $\mathcal{P}(X)$ e S.

  2) $S \sim [0,1)$. Dato $x \in [0,1)$, scriviamo il suo sviluppo *binario* (analogo a quello decimale, ma usando la base 2 al posto di 10):

  $$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots ,$$

  un cui ogni x_n vale 0 o 1 e lo sviluppo non termina con 1 periodico. La funzione che a x associa la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S$ definisce una corrispondenza biunivoca tra $[0,1)$ e l'insieme $S \setminus S_0$, dove S_0 è l'insieme delle successioni tali che $x_n = 1$ per ogni sufficientemente grande n. Si dimostra che S_0 è numerabile. Allora possiamo concludere che

  $$[0,1) \sim S \setminus S_0 \sim (S \setminus S_0) \cup S_0 = S.$$

  Combinando i due passi, si conclude la dimostrazione.

- Sia P_3 l'insieme dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti razionali. Dimostrare che P_3 è numerabile.

  Idea. Ad ogni $p \in P_3$, della forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, associamo la quaterna ordinata $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Otteniamo così una corrispondenza biunivoca tra P_3 e l'insieme numerabile $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

- L'insieme P di tutti i polinomi a coefficienti razionali è numerabile.

  Idea. $P = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$, dove P_k è definito analogamente a P_3 dell'ultimo esercizio.

- Data una retta r nel piano cartesiano, mostrare che esiste un traslato di r che non contenga punti ad entrambe coordinate razionali.

  Idea. Per ogni punto di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pasa un unico traslato di r. Tali rette formano quindi un insieme numerabile. L'insieme di tutti i traslati di r ha la cardinalità del continuo, e quindi tra essi ve ne è almeno uno (in realtà infiniti!) che non è tra le rette precedenti.

17/10/2019 [2 ore: n. 11,12]

- Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ e $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Per ciascuna delle due, stabilire se può essere suriettiva/iniettiva.

- Idea della dimostrazione che $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

  ($|\mathbb{R}| \le |\mathbb{R}^2|$ è facile. La disuguaglianza $|\mathbb{R}^2| \le |\mathbb{R}|$ si ottiene definendo una funzione iniettiva $f\colon [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ che "mescola due allineamenti decimali in uno solo". L'uguaglianza delle due cardinalità poi segue dal seguente [e non banale] Teorema di Cantor–Bernstein.)

  Teorema di Cantor–Bernstein.
  Siano X, Y due insiemi. Se $|X| \le |Y|$ e $|Y| \le |X|$, allora $|X| = |Y|$. In altre parole, se esistono due funzioni iniettive $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$, allora $X \sim Y$.

- **Esercizio per voi.** Mostrare che è possibile scrivere $\mathbb{N}$ come un'unione numerabile di insiemi numerabili, a due a due disgiunti.

- **Esercizio per voi** (FACOLTATIVO).
  Mostrare che esiste una famiglia infinita *non numerabile* di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$,
  $$\{E_\alpha : \alpha \in I\},$$
  tale che $\mathbb{N} = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ e
  $$\forall \alpha, \beta \in I \text{ con } \alpha \neq \beta : E_\alpha \cap E_\beta \text{ è finito}$$
  (cioè, gli insiemi della famiglia sono a due a due "quasi disgiunti").

Numeri complessi

- *Ripasso.* Numeri complessi: forma algebrica, f. geometrica (punti di $\mathbb{R}^2$), modulo, coniugato, argomento; rappresentazione nel piano cartesiano. Forma trigonometrica, f. esponenziale (scrittura abbreviata della f. trigonometrica):
$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha}.$$
$\mathbb{C}$ è un *campo non ordinabile.*

- Ripasso della forma esponenziale: $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$, $\dfrac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$.

- Significato geometrico di: $\bar{z}$, $|z|$, $z \pm w$, zw.

- Determinare la parte reale e quella immaginaria di:
$$-5, \quad -2i, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2i}, \quad \frac{(1+i)(2-2i)}{\sqrt{3}+i}.$$

- La forma trigonometrica di
$$\frac{1-i\sqrt{3}}{i-1}.$$

- Rappresentare graficamente:
  (a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \dfrac{z+i}{z-i} \right| \geq 3 \right\}$
  (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = |z-1|\}$ [qui non servono conti!]
  (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2i| \leq 4\}$ [idem]
  (d) $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \dfrac{z+i}{z+1-i} \in \mathbb{R} \right\}$

22/10/2019 [2 ore: n. 13,14]

- Rappresentare graficamente:
$$A = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = 3\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(iz) < \tfrac{\pi}{2}\}.$$

- Determinare la forma trigonometrica e quella algebrica:
$$(i-1)^7, \quad (\sqrt{3}-i)^{327}.$$

- Le *formule di Eulero*:
$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}.$$

- *Ripasso.* Le "radici n-esime" di un numero complesso $w \neq 0$, cioè, le soluzioni di
$$z^n = w\,.$$

- Rappresentare graficamente gli insiemi:
$$\begin{aligned} &E = \{z \in \mathbb{C} :\ \bar{z} = 2/z,\ \mathrm{Im}(z^3) = 0,\ \mathrm{Re}(z^3) < 0\}\,,\\ &A = \{z^2 : z \in E\}\,,\\ &B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in E\}\,. \end{aligned}$$

- Dato un numero complesso z con $|z| = 2$, disegnare:
$$\bar{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad z^2, \quad \text{le soluzioni } w \text{ di } w^2 = z.$$

- *Teorema Fondamentale dell'Algebra.* Secondo questo teorema importante, *ogni polinomio non costante di variabile complessa ha almeno una radice.* (Ciò non è vero in $\mathbb{R}$, basti pensare al polinomio $P(x) = x^2 + 1$.) Più precisamente, *per ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$,*
$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$
(con $a_i \in \mathbb{C}$), esistono esattamente n numeri complessi (non necessariamente distinti tra loro) $z_1, \ldots, z_n$ tali che
$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) \quad \textit{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$
Quindi un polinomio non costante di grado n ha sempre n radici complesse, se contate con le loro molteplicità.

- *Formula risolutiva per equazioni quadratiche nel campo complesso.* Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Allora le due (eventualmente coincidenti) soluzioni dell'equazione
$$az^2 + bz + c = 0$$
sono date dalla formula
$$z_{\pm} = \frac{-b \pm w}{2a}$$
dove $\pm w$ sono "le due radici quadrate" (in $\mathbb{C}$) di $D := b^2 - 4ac$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 - \bar{z} = 0$.

24/10/2019 [2 ore: n. 15,16]

- *Ripasso* sulle radici complesse di polinomi a coefficienti reali.
- Sia $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 5$. Sapendo che $P(i) = 0$, trovare tutte le radici complesse di P e decomporre $P(x)$ in fattori irriducibili (in $\mathbb{R}$) a coefficienti reali.
- **Esercizio per voi.** Decomporre il polinomio (di variabile reale x) $P(x) = x^6 + 1$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}$.
- Rappresentare graficamente:
  (i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(1/z^2) \leq 0, |z| \geq 3\}$
  (ii) $B = \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z, z \in A\}$
  (iii) $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 5, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)\}$
  (iv) $D = \{w \in \mathbb{C} : w^3 = z, z \in C\}$
  (v) $E = \{w \in \mathbb{C} : w = z^3, z \in C\}$
- Risolvere in $\mathbb{C}$:
  (i) $(z+1)^6 = (1-2z)^6$
  (ii) $z^4 - \bar{z} = 0$
  (iii) $iz^3\bar{z} = |z|^2 + 2$
  (iv) $(z^4 + 2i)(z^3 - 5|z|\bar{z}) = 0$
- *Ripasso* – definizione di spazio metrico.
- Sia X l'insieme delle persone presenti in aula in questo momento. Per $x, y \in X$ poniamo
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y \text{ ma essi sono dello stesso sesso,} \\ 2 & \text{se } x, y \text{ sono di sesso opposto.} \end{cases}$$
  Dimostrare che d è una metrica su X.
- Stabilire se le seguenti due funzioni sono metriche su $\mathbb{R}$:
  (i) $d(x,y) = (x-y)^2$ [no]
  (ii) $d'(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ [sì]
  Una generalizzazione. Per $p > 0$ definiamo $d_p(x,y) = |x-y|^p$. È possibile dimostrare (con metodi non elementari di Analisi matematica) che d_p è una metrica su $\mathbb{R}$ se e solo se $p \leq 1$.

29/10/2019 [2 ore: n. 17,18]

- Risolvere in $\mathbb{C}$:

(a) $z^4 + 5|z|^2 = 6$
(b) $2z^3\bar{z} + z^2 + 6 = 0$

- **Esercizi per voi.** Risolvere in $\mathbb{C}$:
  (a) $\dfrac{z^2|z|}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}\,\bar{z}}{i}$
  (b) $z^5|z^2| = (\sqrt{3}+i)^6\bar{z}$
  (c) $z^3 = \alpha\bar{z}^3$ (dove $\alpha \in \mathbb{C}$ è un parametro)

- *Esempio* – la metrica “delle due stanze”.
  Consideriamo un rettangolo, suddiviso in due parti (non degeneri) da un segmento parallelo ad un lato. Sia p un qualsiasi punto del segmento – p è una “porta”. Ora, sia X l'unione delle due parti (“stanze”), bordi esclusi, unita al singoletto $\{p\}$. Per $x, y \in X$, definiamo $d(x,y)$ come la lunghezza del più breve percorso, tutto compreso in X, che colleghi x e y.
  Abbiamo disegnato le bolle (intorni sferici) nello spazio metrico (X,d).

- *Esempio* – lo spazio metrico delle funzioni limitate.
  Sia E un insieme non vuoto. Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ è detta *limitata* se l'insieme $f(E)$ è limitato. Consideriamo
  $$X = \{f : \ f\colon E \to \mathbb{R} \text{ è limitata}\}$$
  e per $f, g \in X$ definiamo
  $$d(f,g) = \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)|\,.$$
  Esercizio per voi: dimostrate che (X,d) è uno spazio metrico.

- **Esercizio per voi.** Dimostrare che la formula
  $$d(x,y) = \log_2(1 + |x-y|)$$
  Definisce una metrica su $\mathbb{R}$. Determinare poi l'insieme
  $$E = B(0,2) \cap B(2, \log_2 6),$$
  dove le bolle si intendono in $(\mathbb{R}, d)$.

- Determinare l'interno, la frontiera e il derivato dei seguenti insiemi (in $\mathbb{R}^2$ euclideo).
  (a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\sqrt{x+y+2}}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}\right\}$
  (b) $B = \{(x,y) : y = 0, x \in (2,3)\}$
  (c) $C = \{(x,y) : y > 0, y \in \mathbb{Q}, x \leq 0\}$
  (d) $D = \left\{(x,y) : \ (x,y) = (\sin\frac{n\pi}{2}, 1 - \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\right\}$

31/10/2019 [2 ore: n. 19,20]

- *Ripasso.* Se X è un insieme e $f\colon X \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione iniettiva, allora la formula
$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|$$
definisce una metrica su X.

  In realtà, in tal caso f definisce una corrispondenza biunivoca tra X e $f(\mathbb{R})$. Essendo $f(\mathbb{R})$ (con la metrica euclidea) uno spazio metrico, lo spazio metrico (X,d) ora "corrisponde tramite f allo spazio metrico $f(\mathbb{R})$". Si dice che gli spazi metrici (X,d) e $f(\mathbb{R})$ *sono isometrici*, il che significa che, in realtà, sono "lo stesso spazio metrico a meno di una corrispondenza biunivoca".

- *Lo spazio metrico $\overline{\mathbb{R}}$.*
Si ricordi che "$\mathbb{R}$ *esteso*" è l'insieme $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ è ordinato:
$$-\infty < x < +\infty \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
Con tale ordine, $\overline{R}$ è un insieme ordinato completo. Tenendo in mente questo ordine, possiamo scrivere $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

  (a) *La metrica d^* su $\mathbb{R}$ e la sua relazione con la metrica euclidea d_e.* Definiamo su $\mathbb{R}$ la metrica
$$d^*(x,y) := |\arctan x - \arctan y|.$$
Nella terminologia del punto precedente, $(\mathbb{R}, d^*)$ e l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (con la metrica euclidea) sono due spazi metrici isometrici (tramite la funzione $f(x) = \arctan x$).

  Fissato un punto $x \in \mathbb{R}$, abbiamo confrontato i suoi intorni sferici nelle metriche d^* e d_e. Abbiamo visto che *ogni introno di x in una delle due metriche ne contiene uno nell'altra.* Ciò implica facilmente che negli spazi metrici $(\mathbb{R}, d^*)$ e $(\mathbb{R}, d_e)$ coincidono le seguenti nozioni:
    - punto interno, esterno, di frontiera,
    - punti di accumulazione, punto isolato,
    - insieme aperto, chiuso, compatto.

(b) *Estensione della metrica d^* a $\overline{\mathbb{R}}$.*
Definiamo $f : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{se } x = +\infty, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = -\infty. \end{cases}$$

Essa definisce una corrispondenza biunivoca tra $\overline{\mathbb{R}}$ e $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Ora, la metrica

$$d^*(x, y) = |f(x) - f(y)|\,, \quad x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

estende quella del punto (a). Inoltre, gli spazi metrici $(\overline{\mathbb{R}}, d^*)$ e $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sono isometrici. Ne segue immediatamente che lo spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d^*)$ è compatto. In questo modo possiamo considerare $\overline{\mathbb{R}}$ (con la metrica d^*) una "compattificazione di $\mathbb{R}$".

(c) **Esercizio per voi.**
 (i) Se $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ è aperto allora $E \cap \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$.
 (ii) Se $A \subset \mathbb{R}$ è apero allora è aperto anche in $\overline{\mathbb{R}}$.

(d) *Forma degli intorni di $\pm\infty$.* Nello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d^*)$, gli intorni di $+\infty$ (di raggio $< \pi$) coincidono con gli intervalli (in $\overline{\mathbb{R}}$) del tipo $(a, +\infty]$ con $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, gli intorni di $-\infty$ (di raggio $< \pi$) coincidono con gli intervalli (in $\overline{\mathbb{R}}$) del tipo $[-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

- *Norme sugli spazi euclidei.*
Dato $n \in \mathbb{N}$, consideriemo su $\mathbb{R}^n$ le norme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

(dove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).
Abbiamo osservato che:

$$\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_1 \leq n \| \cdot \|_\infty\,,$$

cioè che ciascuna delle tre norme è maggiorata da un multiplo di qualsiasi altra. Diciamo che le tre norme *sono equivalenti.*

Curiosità 1. La formula

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^n$ se e solo se $p \geq 1$ (e due delle tre norme precedenti sono di questa forma).

Curiosità 2. Un teroema importante dice che *ogni norma su* $\mathbb{R}^n$ *è equivalente alla norma euclidea* $\|\cdot\|_2$ (nel senso che ciascuna delle due è maggiorata da un multiplo dell'altra).

- Ogni norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ definisce la metrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Ma non ogni metrica su $\mathbb{R}^n$ proviene da qualche norma!

- **Esercizio per voi.** Trovare un insieme infinito $E \subset \mathbb{R}$ tale che:
  1) $E' = \emptyset$
  2) $|E| = 3$
  3) $E' \sim \mathbb{N}$
  4) $E \sim \mathbb{N}$, $|E'| > |\mathbb{N}|$.

- Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e superiormente limitato. Dimostrare che $s := \sup A \in \overline{A}$.
  (Si noti che ciò implica che *se tale* A *è chiuso allora esiste* $\max A$.)

- Determinare E°, E', ∂E, $\overline{E}$ del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

$$E = [-2, -1) \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [(1, 2) \cap \mathbb{Q}]$$

- Come nell'esercizio precedente, per ciascuno dei seguenti $E \subset \mathbb{R}^2$:
  (a) $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ dove $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 - \frac{1}{n} \leq |x| + |y| < 1 + \frac{1}{n}\}$
  (b) $E = \{(2^{-n}, 4^{-n}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$
  (c) E è il grafico della funzione $f(x) = (1/x)\cos(1/x)$.

---

05 + 07/11/2019 [2+2 ore: n. 21,22,23,24]

In questa settimana non ho avuto il tempo per aggiornare questo registro. Scrivo insieme le due esercitazioni, sperando di non dimenticare degli esercizi. L'ordine degli esercizi non corrisponde esattamente a quello fatto in aula.

- *Ripasso.*

  Definizione di insieme compatto.

  Caratterizzazioni: *per un insieme* C *in uno spazio metrico, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *C è compatto;*
(ii) *ogni sottoinsieme infinito di C ha almeno un punto di accumulazione in C;*
(iii) *ogni successione $\{x_n\} \subset C$ ammette una sottosuccessione convergente a qualche punto di C.*

Se C è compatto allora è chiuso e limitato. Ma non vale il vice versa. Il vice versa vale negli spazi euclidei.

- Mostrare usando la definizione che l'intervallo $(0, 1]$ non è compatto in $\mathbb{R}$.

- *Ripasso.* Sia A un insieme in uno spazio metrico. A è *limitato* significa che $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < +\infty$.

  Esercizio per voi. Dimostrate che le seguenti affermazioni sono equivalenti.
  (i) A è limitato.
  (ii) A è contenuto in qualche bolla (= intorno circolare di qualche punto).
  (iii) Per ogni x_0 dello spazio metrico, A è contenuto in qualche bolla centrata in x_0.

- (X, d) spazio metrico, $\{x_n\} \subset X$.
  (i) Se $x_n \to p \in X$ allora l'insieme $C := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ è compatto.
  (ii) Se $x_n \to p$ allora:
  $$A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ è compatto } \Leftrightarrow \ p \in A.$$
  (iii) Se per qualche $v \in X$ si ha che $d(x_n, v) \to +\infty$, allora $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ non è compatto.

- *Un'anticipazione – la gerarchia degli infiniti.*
  Per semplicità useremo la seguente notazione (non proprio standard). Date due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definitivamente non nulle, la scrittura
  $$x_n \ll y_n$$
  significa che
  $$\lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$
  Ciò equivale a dire che $\lim \frac{|y_n|}{|x_n|} = +\infty$.
  In quanto segue, $a > 1$, $b > 1$, $p > 0$, $q > 0$.
  $$(\log_b n)^q \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Vale anche la seguente generalizzazione: per qualsiasi successione tale che $x_n \to +\infty$ si ha che

$$(\log_b x_n)^q \ll (x_n)^p \ll a^{x_n} \ll [x_n]! \ll (x_n)^{x_n}.$$

- $x_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)^{\frac{2n+3}{n^2-1}}$
- *Osservazione importante.*
$$\{x_n\} \text{ limitata, } \varepsilon_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_n x_n \to 0.$$
(Ciò seguedalla maggiorazione $0 \le |\varepsilon_n x_n| \le C|\varepsilon_n|$ e dal "teorema dei due carabinieri".)
- *Esempio.*
$$x_n = \frac{n\sqrt{n}\,(-1)^n \cos n}{n^2 - n + \sqrt{n} + 10}.$$
(Si applica l'osservazione precedente con $\varepsilon_n = \frac{n\sqrt{n}}{n^2-n+\sqrt{n}+10}$ e $x_n = (-1)^n \cos n$.)
- Al variare di $a \in \mathbb{R}$, calcolare (se esiste) il limite
$$L_a := \lim_{n\to+\infty} n^a \left(a - 2 + \sin\frac{n\pi}{2}\right).$$
- Limiti delle seguenti successioni:
  (a) $x_n = \sqrt[n]{n}$
  (b) $x_n = \dfrac{(1-3n)^{2017} - (n^{1008}+1)^2}{(2\sqrt{n}+1)^{34} \cdot (n^2-n+1)^{1000}}$
  (c) $x_n = \sqrt{n} + \log(n^{10}) - \log^{10} n$
  (d) $x_n = \dfrac{3n\sqrt{n} - 2\sqrt[3]{n^4} + \sqrt{n^3 - n\sqrt{n}}}{\sqrt{n-1}\,(5n + 9\sqrt[4]{n^3+1})}$

12/11/2019 [2 ore: n. 25,26]

- **Esercizi per voi * (facoltativi).**
  (a) Dimostrare che ogni insieme aperto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ è l'unione di una famiglia al più numerabile di *intervalli* aperti a due a due disgiunti.
  (b) Dimostrare che gli unici insiemi *clopen* (cioè, aperti e chiusi) in $\mathbb{R}$ sono gli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

- Determinare e rappresentare graficamente gli insiemi
  (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(i\bar{z}) > 0, \ \mathrm{Im}(\bar{z} - z^2) > 0\}$,
  (b) $B = \{2z/i : \ z \in A\}$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$:
$$\big(z^3 + |z|^2 \bar{z}\big)\big(\bar{z}^5 + 9z\big) = 0.$$

- Sia $C = A \cup B$ dove
$$A = \big[\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big] \cap \big[(-2, +\infty) \times [-1, 0)\big],$$
$$B = (-\infty, 0] \times [0, +\infty).$$
  Determinare C°, C', ∂C.

- Risolvere in $\mathbb{R}$
$$\log_{1/3}\left(\frac{x-a}{x-2}\right)$$
  (solo impostati alcuni primi passaggi).

- Determinare e disegnare:
$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z), \ \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(\sqrt{3}\, z) \leq 0, \ |z| \geq 1/3\},$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} : 1/w \in A\},$$
$$C = A \cap B.$$

- *Osservazione utile.* Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $x_n \to p \in \overline{R}$. Se $\{a_n\}$ è una successone in $\mathbb{Z}$ tale che $a_n \to +\infty$, allora $a_n \in \mathbb{N}$ definitivamente e
$$x_{a_n} \to p.$$

- Siano $\mathbb{R} \ni x_n \to +\infty$, $p > 0$ e $b > 1$. Allora
$$\frac{b^{x_n}}{(x_n)^p} \to +\infty.$$
  (Il caso $x_n = n$ è stato fatto a lezione. Il caso $x_n \in \mathbb{Z}$ segue dall'osservazione precedente. Il caso generale si dimostra utilizzando il "teorema dei due carabinieri" e le stime: $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$.)

- Usando il risultato dell'esercizio precedente, dimostrare che (se $p > 0$ e $b > 1$)
$$\frac{n^p}{\log_b n} \to +\infty.$$
  (Basta porre $x_n = \log_b n$.)

- *Ripasso.* $(1+\frac{1}{n})^n \nearrow e$. (Curiosità: $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \searrow e$.)
- $(1+\frac{1}{-n})^{-n} \to e$.
- Dai due punti precedenti è possibile dimostrare che:

$$|x_n| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e.$$

21/11/2019 [2 ore: n. 27,28]

- *A proposito del compitino.*
  (a) A proposito della parte immaginaria.
  (b) A proposito di $\sqrt{-49}$. (Non esiste $\sqrt{-49}$ come un numero complesso [in $\mathbb{C}$, non esiste alcun modo "ragionevole" per preferire una delle due "radici quadrate" di un numero complesso]. Ma si può definire ${}_{\mathbb{C}}\sqrt{-49}$ [la radice quadrata complessa] come l'insieme $\{-7i, 7i\}$.)
  (c) Svolgimento dell'esercizio "teorico" (n. 5).
  (*Per chi studia matematica, è necessario imparare a ragionare in modo logico deduttivo ed essere capaci di esprimere il ragionamento in modo formalmente corretto e preciso [allo scopo di comunicarlo ad altri]. Nello svolgimento di esercizi, è importante sapere e comprendere le definizioni coinvolte e, ovviamente, leggere con attenzione il testo dell'esercizio.*)

- **Limiti notevoli** - <u>*da imparare a memoria!*</u>

  In quanto segue, $\{x_n\}$ e $\{\varepsilon_n\}$ sono successioni di numeri reali, e supponiamo sempre che:

  $$|x_n| \to +\infty, \quad 0 \neq \varepsilon_n \to 0, \quad p \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad b > 0,\ b \neq 1.$$

  ◇ $$\left(1+\frac{p}{x_n}\right)^{x_n} \to e^p\,.$$

  ◇ $$(1+p\,\varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \to e^p\,.$$

  ◇ $$\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1\,, \qquad \frac{\log_b(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to \frac{1}{\log b} = \log_b e\,.$$

  ◇ *Riformulazione utile:* se $1 \neq t_n \to 1$ allora $\dfrac{\log t_n}{t_n - 1} \to 1\,.$

$\diamondsuit$ $$\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to 1\,, \qquad \frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to \log a\,.$$

$\diamondsuit$ *Esempio 1.* $$x_n = \frac{n\left(\log(n^2+1) - 2\log n\right)}{1-e^{2/n}}$$

$\diamondsuit$ *Esempio 2.* $$y_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2-4}\right)^{n^a} \quad (a \in \mathbb{R} \text{ parametro})$$

$\diamondsuit$ $$\frac{(1+\varepsilon_n)^p - 1}{\varepsilon_n} \to p\,.$$

$\diamondsuit$ *Esempio 3.* $$x_n = n^a\left(\sqrt[6]{n^3+5} - \sqrt{n}\right) \quad (a \in \mathbb{R} \text{ parametro})$$

$\diamondsuit$ $$\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1, \quad \frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1, \quad \frac{\arcsin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1, \quad \frac{\arctan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1.$$

$\diamondsuit$ $$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}\,.$$

26/11/2019 [2 ore: n. 29,30]

- $$x_n = \frac{2^{n^a}-1}{(\log n)\,\log(1-\sin(\pi/n))} \qquad (\text{dove } a \in \mathbb{R})$$
- **Due notazioni utili, ma solo se si conosce bene il loro uso:**
  $x_n \sim y_n$ significa che $\frac{x_n}{y_n} \to 1$ (*asintotico*).
  $x_n = o(y_n)$ significa che $\frac{x_n}{y_n} \to 0$ (*"o piccolo"*).
- **Relazione tra "asintotico" e "o piccolo":**
  $$x_n \sim y_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n = y_n + o(y_n) \quad \Leftrightarrow \quad y_n = x_n + o(x_n).$$
  In particolare, $y_n + o(y_n) \sim y_n$.
- **Proprietà di "$\sim$".** Abbiamo visto che questa relazione mantiene: limiti, segno definitivamente, comportamento, prodotti, quozienti, potenze, **ma non mantiene somme/differenze, né esponenziali**.
  Logaritmi. Se $x_n \sim x'_n$ e $|\log x_n| \to +\infty$ (o equivalentemente, $|\log x'_n| \to +\infty$), allora $\log x_n \sim \log x'_n$.
- $$x_n = (\sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n} + 1)\cdot \arctan\left(\sqrt[3]{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right)$$

- $x_n = \big[\cos(1/n)\big]^{b_n}$ dove $b_n = n^a \sin(1/n)$ $(a \in \mathbb{R})$
- $x_n = (a_n)^{b_n}$ dove $a_n = \log(4^n + 2e) - \log(4^n + 2)$, $b_n = \sqrt{n^4 + n} - n^2$

28/11/2019 [2 ore: n. 31,32]

- **Esercizio "con asterisco".** Dimostrare:
$$E \subset \mathbb{R},\ |E| > |\mathbb{N}| \quad \Rightarrow \quad E' \neq \emptyset.$$
- *Ripasso.*
(a) $\lim a^n$ $(a \in \mathbb{R})$
(b) Asintotico.
- $x_n = a^n\big[(2^n + 3^n)^{1/n} - 3\big]$
- *"o piccolo"* – definizione e proprietà.
Ripasso: $y_n + o(y_n) \sim y_n$.
- $x_n = \dfrac{e^{1/n} - \cos(1/n)}{\log n - 8n + n\log n}$, $\qquad y_n = (n^2+1)^{(n^2+1)x_n}$
- $x_n = \sqrt{n}\,\big(\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[7]{n-2}\big)$
- $x_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$
- $x_n = (n!)^2\, e^{-n^2}$
- Le *funzioni iperboliche*
$$\mathrm{Sh}(x) \equiv \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\mathrm{Ch}(x) \equiv \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\mathrm{Th}(x) \equiv \tanh x := \frac{\mathrm{Sh}(x)}{\mathrm{Ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$
loro grafici e proprietà.
- Trovare esempi (o giustificare che non esistono) di $\{x_n\}_n$ con la classe limite $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{x_n\})$ tali che:
(a) $|\mathcal{E}| = 3$;
(b) $\mathcal{E} = \mathbb{N}$;
(c) $\mathcal{E} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$;

(d) $\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

- *Curiosità:* $\mathcal{E}(\{\sin n\}) = \mathcal{E}(\{\cos n\}) = [-1, 1]$.
- **Esercizio per voi.** Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, determinare la classe limite della successione
$$x_n = \beta^n \arctan(n^{-\beta}) .$$

03/12/2019 [2 ore: n. 33,34]

- Classe limite di
$$x_n = n^2 \left[\log(5n - \sqrt{3 + 9n^2}) - \log(2n)\right] e^{n \sin(n\pi/3)} .$$
- Svolgimento dell'*Esercizio per voi* della volta scorsa.
- **Serie numeriche** – ripasso.
- *Serie notevoli (da conoscere a memoria!):*
  (a) serie geometriche $\sum_1^\infty a^n$;
  (b) serie "armoniche generalizzate" $\sum_1^\infty \frac{1}{n^a}$;
  (c) serie del tipo
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a} (\log n)^b$$
  che convergono se e solo se
$$[\, a > 1,\ b \in \mathbb{R}\,] \quad \text{oppure} \quad [\, a = 1,\ b > 1\,].$$
  [Dimostrato.]

09/12/2019 [2 ore: n. 35,36]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + 3\cos(\pi n)}{\sqrt{n+1}\;(2n - 19)}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+3]{x} \right) \quad (x > 0)$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{an}\, n!}{n^n} \quad (a \in \mathbb{R})$
  I casi $a \neq 1$ sono stati risolti con il criterio del rapporto. Per il caso $a = 1$ bisogna utilizzare strumenti più avanzati.
  Formula di Stirling: $n! \sim \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.
  Corollario: $\log(n!) \sim n \log n = \log(n^n)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n + 1)}{n^2 + 2}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot n^b \quad (a, b \in \mathbb{R})$

- Serie a segno alterno.
  (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{1+n}$ [senza criterio di Leibniz]
  (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{1+n^3}$ [senza criterio di Leibniz]
  (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{1+n^2}$ [con criterio di Leibniz: bisogna verificare la monotonia!]

- **Sviluppi notevoli** – v. il file sulla mia pagina web.

10/12/2019 [2 ore: n. 37,38]

- **Sviluppi notevoli** – continuazione.

- Determinare (se esistono) $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_n := \frac{n}{n+1} + 2\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 3 \;\sim\; a\, n^b\,.$$

- $\displaystyle\lim_n \frac{\sqrt{1 - \cos(1/\sqrt{n})}}{(n+2)^{3/2} - n^{3/2} - 3\sqrt{n}}$

- $\lim_n \dfrac{(1+\sin\frac{1}{n})^{n^3}}{e^{n^2-(n/2)}}$

- **Esercizi per voi.**

  (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}\right)\right\} \qquad (a \in \mathbb{R})$

  (b) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e \ \sim \ \frac{a}{n^b}$.

- Sia $|a| < 1$. Mostrare che la seguente serie converge e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a^n \,.$$

- **Esercizio per voi.** Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n = o(n^{-1}) \text{ per } n \to +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

  Dimostrare che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ è convergente e che le somme delle due serie coincidono.

- $\lim_n \ n^4 \left[\cos^2\left(\dfrac{2}{n}\right) + 4\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right]$

12/12/2019 [2 ore: n. 39,40]

- *Un'osservazione relativa alla* **serie somma**.
  Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

  hanno lo stesso comportamento. Se inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è regolare, allora le somme delle tre serie soddisfano

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

- Approssimare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n}$$
con un errore che non superi 10^{-4}.

- **A proposito del criterio di Leibniz.** Consideriamo la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} =: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \, .$$
Attenzione: anche se $0 < b_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$, non possiamo concludere che la nostra serie converge (perché ciò non assicura la monotonia di $\{b_n\}$!).
Infatti, la nostra serie è, in realtà, la serie somma
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$
che diverge (secondo la nostra osservazione di sopra)!
Morale: *quando usiamo il criterio di Leibniz per le serie del tipo* $\sum_1^\infty (-1)^n b_n$*, non possiamo sotituire* b_n *con un suo asintotico!!!*

- Sia $x_n = \exp\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right) - 1 - \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ $(n \geq 2)$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{(\log n)^{7+\alpha} \arctan(n^{-\alpha})} \, .$$

- $\lim_n \left\{ \sqrt{n^4+b} - (n^3+n^2)\left[\sin\left(\frac{n-2}{n^2}\right) + \frac{b}{n^2} \right] \right\} \qquad (b \in \mathbb{R})$

- *Limiti di funzioni* – ripasso.

- Consideriamo le seguenti condizioni:
(a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$;
(b) $\lim_{x \to 2} f(x) = -1$;
(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$;
(d) $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$.
Prima, scrivere le definizioni di (b),(c),(d).
Poi, disegnare il grafico di una funzione f che soddisfi tutte le condizioni (a)–(d).

- *Importante:* dalla caratterizzazione successionale della definizione di limite segue che, anche per i limiti di funzioni, continuano a valere i limiti notevoli, la gerarchia degli infiniti e gli sviluppi notevoli.
  Ad esempio:

  $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$,
  $\log x \sim x - 1$ per $x \to 1$,
  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$ per $x \to 0$,
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^p x}{x^q} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{e^x}$, $\qquad q > 0,\ p \in \mathbb{R}$.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x \log x\,, \quad \lim_{x\to 0^+} x^x\,, \quad \lim_{x\to 0^+} x e^{1/x}\,, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x}\,.$

17/12/2019 [2 ore: n. 41,42]

- **Esercizio per voi** ***.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}\,.$$

- $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{x-1}$

- $\displaystyle \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1+\cos x}$

- $\displaystyle f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$. Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to-1} f(x)\,.$$

- $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^x - 4}{x^2 - 4}$

- *Asintoti.*
  Asintoti verticali, cioè, asintoti "al finito".
  Asintoti a $\pm\infty$*.* La retta $y = mx + q$ è asintoto al grafico di f per $x \to +\infty$ se
  $$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx - q\big) = 0,$$
  o equivalentemente
  $$f(x) = mx + q + o(1) \qquad \text{per } x \to +\infty,$$
  o equivalentemente ancora:
  $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\,, \quad q = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big).$$

- Determinare tutti gli asintoti:
  (a) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 1}$
  (b) $g(x) = x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
  (c) $h(x) = x\left[(2x + 2x^2)\log\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - 6xe^{1/x} - 3\right]$

19/12/2019 [2 ore: n. 43,44]

- Avvertimenti sulla differenza tra "asintoto" e "asintotico".

- $f(x) = \log(e^{2x} + 2) + \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}\,.$
  (a) Determinare tutti gli asintoti.
  (b) Determinare la retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

- *Ripasso.* Continuità in un punto. Continuità su un intervallo.
  Il teorema di Darboux: *se f è continua sull'intervallo I allora $f(I)$ è un intervallo.*

- Dimostrare che esiste $x < 0$ tale che
  $$f(x) := \sqrt[4]{x^3(x-1)} - \sqrt[4]{x^3(x-3)} = -\frac{\pi}{10}\,.$$
  [f è continua su $(-\infty, 0]$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$. Quindi, $f((-\infty, 0])$ è un intervallo contenente $(-\frac{1}{2}, 0] \ni -\frac{\pi}{10}$.]

- Classificare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:
$$\frac{|x|}{x}, \quad \frac{[x]}{x}, \quad \sin\left(\frac{\pi x}{|x|}\right), \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\sin\left(\frac{1}{x^2+x}\right).$$

- **Esercizio per voi.** Le discontinuità di $h(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$.

- **Esercizio per voi.** Le discontinuità di
$$f(x) = \frac{9x - 2^{1/|x|}}{4 - 2^{1/|x|}}.$$

- Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua in 0 ?
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - b\arctan x}{\log(1+x^2) - \mathrm{Sh}(x^3)} & \text{per } x < 0, \\ 0 & \text{per } x = 0, \\ x^a \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

- Derivare: $\log^3(\sin x)$, $\log(\sin^3 x)$.

- *Esempio.* $f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

  Abbiamo visto che:
  - f è continua se e solo se $a > 0$;
  - f è derivabile se e solo se $a > 1$;
  - f è derivabile con la derivata f' continua se e solo se $a > 2$.

  In particolare, se $a = 2$ la funzione derivata f' è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$, ma essa *non* è continua in 0 (dove ha una discontinuità di II specie).

07/01/2020 [2 ore: n. 45,46]

- Sia $f(x) = (\cos x)\log|2x - \pi|$. Dimostrare che f è prolungabile con continuità a tutto $\mathbb{R}$, e stabilire poi se tale prolungamento è derivabile su $\mathbb{R}$.

- Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, studiare la continuità e la derivabilità della funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)}{3x + x^2} & \text{se } x > 0, \\ \\ a + \exp(bx \cos x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- *Derivata e monotonia* - un ripasso.
Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione tali che:
  - $I^\circ \neq \emptyset$,
  - f sia continua su I e derivabile su I°.

  Allora valgono le seguenti affermazioni.
  A. f è monotona non decrescente su I se e solo se $f' \geq 0$ su I°.
  B. f è strettamente crescente su I se e solo se: $f' \geq 0$ su I° e l'insieme $\{x \in I^\circ : f'(x) = 0\}$ non ha punti interni.
  C. *Corollario.* Se $f' > 0$ su I° allora f è strett. crescente su I. (Attenzione! Il vice versa è in generale falso: si consideri $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.)

- Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza assoluta e quella semplice della serie
$$\sum_{n=3}^{\infty} (e^{2x} - 2e^x)^n \, \frac{n}{n^2 + \log n} \, .$$
(Per verificare la monotonia della successione $\left\{\frac{n}{n^2+\log n}\right\}$ abbiamo studiato la monotonia della funzione $g(t) = \frac{t}{t^2+\log t}$.)

- Dimostrare:
  (a) $\sin x < x$ per ogni $x > 0$;
  (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ per ogni $x > 0$.

- Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il numero delle soluzioni dell'equazione
$$e^x = \frac{a}{x^2 - 3} \, .$$

13/01/2020 [2 ore: n. 47,48]

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - 4e^x + x$. È suriettiva? È iniettiva?

- Sia $g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con $g(2) = 1/3$, $g'(2) = -1/5$. Determinare lquazione della retta tangente al grafico di
$$f(x) = x^{g(x)} \qquad (x > 0)$$
nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$.
  (a) Dimostrare che f è biiettiva e che la sua funzione inversa $g := f^{-1}$ è infinite volte derivabile in un intorno di $y_0 = 0$.
  (b) Calcolare il limite
$$\lim_{y\to 0} \frac{2g(y) - y}{y^2} \,.$$

- Ripasso sugli sviluppi di Taylor con il resto secondo Peano.
N.B.: Gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ vengono anche chiamati *sviluppi di McLaurin.*

- Calcolare $f^{(8)}(0)$ per la funzione
$$f(x) = \frac{1 + \cos(x^2)}{1 + x^4} + \frac{\cos(x^5)\ - 1}{1 - x} \,.$$

- *Osservazione.* Se f è pari [dispari] e derivabile in un intorno simmetrico di 0, allora f' è dispari [pari]. Unendo questa osservazione con il fatto che se g è dispari allora $g(0) = 0$, otteniamo facilmente che: *se f è pari [dispari], allora nel suo polinomio di Taylor, solo le potenze pari [dispari] possono essere presenti con dei coefficienti non nulli.*

- Determinare lo sviluppi di McLaurin (resto secondo Peano) arrestato al III ordine della funzione $\mathrm{Th}(x)$.

- Per $a \in \mathbb{R}$, sia f una funzione 3 volte derivabile in 0 tale che
$$f(x) = (a-4)(a-1)x + a(a-4)x^2 + (a-1)x^3 + o(x^3)$$
per $x \to 0$. Quando $x_0 = 0$ è un estremante o un punto di flesso?

14/01/2020 [2 ore: n. 49,50]

- *Ricevimento in aula* – svolgimento di vari esercizi proposti dagli studenti.
