Analisi Convessa 2015-2016

Problemini per voi

Se non specificato altrimenti, lo spazio ambiente è uno spazio normato X.

1. Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X.

(a) Dimostrare che A è convesso se e solo se $tA + sA = (t + s)A$ per ogni $t, s > 0$.

(b) Dimostrare che se $A + A = A$ l'insieme A può non essere convesso.

(c) Sia ora X normato e A aperto o chiuso. Dimostrare che A è convesso se e solo se $A + A = A$.

2. Dimostrare che se C è convesso allora lo sono anche gli insiemi $\operatorname{int} C$ e $\overline{C}$.

3. Dimostrare che l'involucro convesso di un insieme aperto è un insieme aperto.

4. Sia $E \subset X$ un insieme (non vuoto) finito-dimensionale. E' vero che $\operatorname{aff} E$ è sempre chiuso? Vale lo stesso anche con "compatto" al posto di "finito-dimensionale"?

5. E' vero che, per ogni insieme $E \subset X$, si ha che $\operatorname{span} E = \operatorname{aff}(E \cup \{0\})$?

6. Siano $\{x_n\} \subset X$ e $\{\lambda_n\} \subset [0, +\infty)$ due succesioni tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1$ e la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n$$

converga in X. Dimostrare che la somma di quest'ultima appartiene a $\overline{\operatorname{conv}}\{x_n\}_1^{+\infty}$.

7. Sia X uno spazio di Banach e supponiamo che $\{x_n\} \subset X$ sia limitata e che $\{\lambda_n\} \subset [0, +\infty)$ soddisfi $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1$. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n$ è convergente.

8. Mostrare che l'involucro convesso di un insieme chiuso $F \subset \mathbb{R}^2$ può non essere chiuso. Un simile esempio esiste anche in $\mathbb{R}$?

9. Esiste un sottoinsieme proprio di X che sia denso, aperto e convesso in X?

10. Esiste un sottoinsieme convesso proprio di $\mathbb{R}^d$ che sia denso in $\mathbb{R}^d$?

11. Diciamo che un insieme E è algebricamente chiuso [aperto, limitato, denso] se, per ogni retta L, l'insieme $E \cap L$ è chiuso [aperto, limitato, denso] in L. Sia ora C un insieme convesso in $\mathbb{R}^d$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa.

(a) C è chiuso se e solo se C è algebricamente chiuso.
(b) C è aperto se e solo se C è algebricamente aperto.
(c) C è limitato se e solo se C è algebricamente limitato.
(d) C è denso se e solo se C è algebricamente denso.

12. Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto convesso e $f\colon K \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente.

(a) Dimostrare che se $d = 1$ allora f è continua su K.
(b) Mostrate con un esempio che se $d = 2$ allora f può non essere continua su K.
(*Suggerimento.* Prendete come K un cerchio e definite f in modo che la restrizione $f|_{\partial K}$ non sia continua.)

13. Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio normato X. La *funzione distanza* dell'insieme A è la funzione

$$d_A(x) := \mathrm{dist}(x, A) \equiv \inf_{a \in A} \|x - a\| \qquad (x \in X).$$

(a) La funzione d_A è sempre 1-lipschitziana e $d_A = d_{\overline{A}}$.

(b) Se A è convesso, allora d_A è convessa su X.

(c) Se $C := X \setminus A$ è convesso, allora d_A è concava su C.

14. Dato un insieme finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$, un punto $x_0 \in X$ è una *mediana* di A se esso minimizza la funzione

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - a_i\| \qquad (x \in X).$$

Dimostrare che, se vale almeno una delle seguenti condizioni, ogni sottoinsieme finito (non vuoto) di A ammette almeno una mediana.

(a) X è uno spazio di Banach duale.

(b) X è uno spazio di Banach riflessivo.

15. Siano $A \subset X$, $B \subset X^*$.
L'*involucro conico* di A è l'insieme $\operatorname{cone} A := \bigcup_{t \geq 0} tA$, mentre l'*incolucro convesso conico* di A è l'insieme $\operatorname{ccone} A := \operatorname{cone}(\operatorname{conv} A)$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) $\operatorname{ccone} A = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ : \ t_i \geq 0,\ x_i \in A\}$.

(b) Se $A^* := \{x^* : x^*|_A \geq 0\}$ e ${}^*B := \{x \in X : x|_B \geq 0\}$, allora

$$^*(A^*) = \overline{\operatorname{ccone}}\, A\,, \qquad (^*B)^* = \overline{\operatorname{ccone}}^{w^*}\, B\,.$$

(c) Se $A^\perp := \{x^* : x^*|_A \equiv 0\}$ e ${}^\perp B := \{x \in X : x|_B \equiv 0\}$, allora

$$^\perp(A^\perp) = \overline{\operatorname{span}}\, A\,, \qquad (^\perp B)^\perp = \overline{\operatorname{span}}^{w^*}\, B\,.$$

16. Sia p una funzione sublineare su uno spazio normato X (a valori in $\mathbb{R}$). Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) p è lipschitziana;

(ii) p è continua;

(iii) p è continua in 0;

(iv) p è limitata in un intorno di 0;

(v) p è limitata superiormente in un intorno di 0.

17. Siano X, Y spazi normati, $C \subset X$ e $D \subset Y$ insiemi aperti convessi (non vuoti). Sia $h \colon C \times D \to \mathbb{R}$, $h = h(x, y)$, una funzione convessa in x e concava in y. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) h è localmente lipschitziana in $C \times D$;

(ii) h è continua in $C \times D$;

(iii) h è continua in almeno un punto di $C \times D$;

(iv) h è limitata su un sottoinsieme aperto non vuoto di $C \times D$.

(*Suggerimento:* utilizzare i lemmi sulla continuità di funzioni convesse; procedere "per rettangoli".)

18. Siano X, Y, C, D, h come nell'esercizio precedente.

(a) Se X, Y sono finito-dimensionali, allora h è continua in $C \times D$.

(b) Se almeno uno degli spazi X, Y ha dimensione infinita, allora la funzione h può essere discontinua in ogni punto di $C \times D$.