Breve descrizione del
contenuto delle lezioni di
ANALISI CONVESSA
corso di L.M. in Matematica
L. Vesely, **2015–2016**

Le dimostrazioni che potrebbero essere richieste all'esame sono segnate con un triangolo: $\triangle$.

I testi pubblicati sulla mia pagina web
spesso non corrispondono all'esposizione fatta a lezione.
Chi volesse approfondire
vi troverà anche una piccola bibliografia.

29/02/2016 [2 ore: n. 1,2]

- Introduzione al corso.
(Il termine "Analisi convessa" è stato per la prima volta utilizzato da R.T. Rockafellar nel libro *Convex Analysis*.)

- Sia X uno spazio vettoriale (s.v.) reale. Il segmento di estremi $x, y \in X$ è l'insieme
$$[x,y] = \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\} = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$$
$$= \{\alpha x + \beta y : \ \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta = 1\}.$$
Analogamente, la retta passante per x, y (se $x \neq y$) è l'insieme
$$\{x + t(y-x) : t \in \mathbb{R}\} = \{\alpha x + \beta y : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha + \beta = 1\}.$$

- Definizione di: insieme convesso, insieme affine e sottospazio.

- Facili proprietà (esercizi).
  - Sottospazio $\Rightarrow$ affine $\Rightarrow$ convesso.
  - E è sottospazio se e solo se E è affine e contiene l'origine.
  - E è affine se e solo se esiste (equivalentemente: per ogni) $x_0 \in E$ tale che $E - x_0$ è un sottospazio. (E tale sottospazio non dipende dalla scelta di x_0.)
  - La famiglia dei convessi/affini/sottospazi è chiusa rispetto ad intersezioni qualsiasi.

- $\triangle$**Lemma.** *Un insieme E (in uno s.v. X) è convesso se e solo se* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x_1, \dots, x_n \in E\ \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ *con* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in E.$$
(In altre parole, gli insiemi convessi sono chiusi rispetto a combinazioni convesse di qualsiasi lunghezza finita.)
Analogamente per insiemi affini.

- Siano X s.v., $E \subset X$. L'*involucro convesso* di E è il più piccolo insieme convesso (denotato con $\operatorname{conv} E$) contenente E. Cioè,
$$\operatorname{conv} E = \bigcap \left\{ C \subset X :\ C \text{ convesso, } E \subset C \right\}.$$
Analogamente si definiscono: (a) l'*involucro affine* $\operatorname{aff} E$; e (b) l'*involucro lineare* $\operatorname{span} E$.

- $\triangle$**Teorema.** Siano X s.v., $E \subset X$. Allora
$$\operatorname{conv} E = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i :\ n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in E,\ \sum_1^n \lambda_j = 1 \right\}.$$

- Definizione della *dimensione (lineare)* di un insieme:
se A è affine definiamo $\dim A := \dim(A - a)$ dove $a \in A$;
per un qualsiasi insieme E poniamo $\dim E := \dim(\operatorname{aff} E)$.

- $\triangle$**Teorema (Carathéodory).** *Siano X s.v., $E \subset X$, $x \in X$. Se $\dim E = d \in \mathbb{N}$ e $x \in \operatorname{conv} E$, allora esiste un insieme $E_0 \subset E$ di cardinalità al più $d+1$ tale che $x \in \operatorname{conv} E_0$.*

- $\triangle$**Corollario (Carathéodory).** Se $\dim E = d$, allora
$$\operatorname{conv} E = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i :\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in E,\ \sum_1^{d+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

- $\triangle$**Corollario.** *Siano X uno spazio vettoriale topologico (s.v.t., ad esempio, uno spazio normato) e $K \subset X$ un insieme compatto finito-dimensionale. Allora anche* $\operatorname{conv} K$ *è compatto.*

- $\triangle$**Esempio** (che mostra che l'ipotesi "finito-dimensionale" non può essere omessa). Consideriamo lo spazio di Hilbert (reale) $X = \ell_2$ e la sua base ortogonale canonica $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Siccome $\frac{1}{n}e_n \to 0$, l'insieme
$$K = \left\{\tfrac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$
è compatto. Consideriamo il punto $x = \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2^n})\frac{1}{n}e_n$ (che è una specie di "combinazione convessa infinita" di elementi di K); esso è ben definito, ad esempio, perché $(\frac{1}{2^n n})_{n=1}^{+\infty} \in \ell_2$. Allora
$$x \in \overline{\operatorname{conv} K} \setminus \operatorname{conv} K$$
e quindi $\operatorname{conv} K$ non è compatto. (Ma vedremo più avanti che $\overline{\operatorname{conv} K}$ è compatto.)

03/03/2016 [2 ore: n. 3,4]

- **Corollario.** In uno spazio normato (o in uno s.v.t.), l'involucro convesso di un insieme finito è sempre compatto.

- **Proposizione.** Siano $C_1, \dots, C_n$ insiemi convessi in uno spazio normato (o s.v.t.) X. Consideriamo gli insiemi (convessi)
$$A = \operatorname{conv}(C_1 \cup \cdots \cup C_n)\,, \qquad B = C_1 + \cdots + C_n\,.$$
  1. $A = \{\sum_1^n \lambda_i c_i : \ \lambda_i \geq 0, \sum_1^n \lambda_j = 1, \ c_i \in C_i\}$.
  2. Se tutti i C_i sono compatti, allora A, B sono compatti.
  3. Se ogni C_i con $i < n$ è compatto e C_n è chiuso e limitato, allora A, B sono chiusi.

- *Ripasso* – definizione di *insieme totalmente limitato* (o *precompatto*). In uno spazio metrico, un insieme *è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.*

- $\triangle$**Teorema.** *Sia A un insieme totalmente limitato in uno spazio metrico (o s.v.t. localmente convesso). Allora anche* $\operatorname{conv} A$ *è totalmente limitato.*

- *Involucro convesso chiuso.* Sia X uno s.v.t. Per $E \subset X$, definiamo
$$\overline{\operatorname{conv}}\, E := \bigcap \left\{ C \subset X : \ C \text{ convesso e chiuso, } E \subset C \right\}.$$
E' facile vedere che $\overline{\operatorname{conv}}\, E = \overline{\operatorname{conv} E}\,.$

- $\triangle$**Corollario.** Sia X uno spazio di Banach. Se $A \subset X$ è totalmente limitato (ad es., compatto), allora $\overline{\operatorname{conv}} A$ è compatto.

- *Interno e chiusura.*
Sia C un insieme convesso in uno spazio normato (o s.v.t.).
(a) *Osservazione.* Se $x \in \operatorname{int} C$ e $y \in C$, allora $[x, y) \subset \operatorname{int} C$.
(b) *Corollario.* Se $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, allora $\operatorname{int} C$ è denso in C, e quindi
$$\overline{C} = \overline{\operatorname{int} C}\,.$$
(c) Se $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, allora
$$\operatorname{int} C = \operatorname{int}(\,\overline{C}\,).$$

- *Interno relativo.*
Dati X uno spazio normato (o s.v.t.) e $E \subset X$, l'*interno relativo* di E è l'insieme
$$\operatorname{ri} E := \operatorname{int}_{\operatorname{aff} E}(E),$$
cioè, l'interno di E nel suo involucro affine.

- Breve ripasso su spazi finito-dimensionali.

- $\triangle$**Teorema (interno relativo non vuoto).** *Sia X uno spazio normato (o s.v.t. di Hausdorff). Se $C \subset X$ è convesso e finito-dimensionale, allora* $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$.

07/03/2016 [2 ore: n. 5,6]

- **Ripasso sugli spazi di Baire.** Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico (X, τ).
(a) A è *mai denso* se non è denso in alcun insieme aperto non vuoto.
(b) A è di *I categoria (di Baire)* se può essere scritto come unione numerabile di insiemi mai densi.
(c) A è di *II categoria* se non è di I categoria.
(d) X è uno *spazio di Baire* se ogni suo sottoinsieme aperto non vuoto è di II categoria.
(e) **Teorema.** *Ogni spazio metrico completo e ogni spazio topologico localmente compatto sono spazi di Baire.*

- *Interno algebrico.* Siano X uno s.v., $A \subset X$, $x_0 \in A$.

  $$x_0 \in \text{a-int}\, A \equiv \quad \forall v \in X\ \exists \delta > 0 : \quad x_0 + tv \in A \text{ per ogni } t \in [0, \delta].$$

- $\triangle$ In generale, si ha che
  $$\text{int}\, A \subset \text{a-int}\, A\,,$$
  ma i due insiemi possono essere diversi, anche per A convesso. Infatti, se consideriamo lo spazio normato
  $$X := c_{00} \equiv \{x = (x_n) : x_n = 0 \text{ definitivamente}\}$$
  (con la norma $\|\cdot\|_\infty$) e l'insieme
  $$A = \{x \in X :\ |x_n| \le \tfrac{1}{n} \text{ per ogni } n\}\,,$$
  A è convesso e chiuso, $\text{int}\, A = \emptyset$, ma
  $$0 \in \text{a-int}\, A\,.$$

- $\triangle$**Teorema.** *Sia C un insieme convesso in uno spazio normato X. Supponiamo che valga* almeno una *delle seguenti:*
  (a) $\text{int}\, C \neq \emptyset$*;*
  (b) $\dim C < \infty$*;*
  (c) X è uno spazio di Banach e C è del tipo $\mathcal{F}_\sigma$.
  Allora
  $$\text{int}\, C = \text{a-int}\, C\,.$$

Funzioni convesse e affini

Se non specificato altrimenti, X, Y sono spazi vettoriali, $A \subset X$ è affine, $C \subset X$ è convesso.

- *Definizione.* Una funzione $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ è *convessa* se il suo epigrafo
  $$\text{epi}\, f := \big\{(x,t) \in C \times \mathbb{R} :\ t \ge f(x)\big\}$$
  è un insieme convesso (in $X \times \mathbb{R}$).

- *Lemma.* Una funzione $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ è convessa se e solo se

$$\forall x, y \in C \ \forall \alpha, \beta \geq 0 \text{ con } \alpha + \beta = 1 : \quad f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

(con la convenzione $0 \cdot (+\infty) := 0$).

- **Proposizione (Jensen).** Una funzione $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ è convessa se e solo se

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x_1, \ldots, x_n \in C \ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \text{ con } \textstyle\sum_1^n \lambda_i = 1 : \quad f(\textstyle\sum_1^n \lambda_i x_i) \leq \textstyle\sum_1^n \lambda_i f(x_i) \ .$$

- *Definizione.*
  (a) $F\colon A \to Y$ è *affine* $\equiv$ $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$ ogniqualvolta $x, y \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$.
  (b) $F\colon C \to Y$ è *c-affine* $\equiv$ $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$ ogniqualvolta $x, y \in C$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

- *Proprietà.*
  1. $f\colon C \to \mathbb{R}$ è c-affine se e solo se f è convessa e concava.
  2. $F\colon A \to Y$ è affine se e solo se il suo grafico, $\operatorname{gr} f$, è un insieme affine.
  3. $F\colon C \to Y$ è c-affine se e solo se $\operatorname{gr} f$ è convesso.
  4. $F\colon X \to Y$ è lineare se e solo se F è affine e $F(0) = 0$.
  5. $F\colon X \to Y$ è affine se e solo se esiste $y_0 \in Y$ tale che $F + y_0$ sia lineare.
  6. $F\colon A \to Y$ è affine se e solo se F è c-affine. (Per questo motivo, in seguito useremo il termine "affine" al posto di "c-affine".)
  7. Se $F\colon C \to Y$ è (c-)affine, allora esiste un'unica mappa affine $\widetilde{F}\colon (\operatorname{aff} C) \to Y$ che estenda F.

Continuità di funzioni convesse

- $\triangle$**Lemma.** *Siano X uno s.v., $C \subset X$ convesso simmetrico, $f\colon C \to \mathbb{R}$ convessa e limitata superiormente. Allora f è limitata.*
(Si dimostra che, se $f \leq m$, allora $|f| \leq M := \max\{2|f(0)|, |m|\}$.)

10/03/2016 [2 ore: n. 7,8]

- $\triangle$**Lemma base.** *Siano X uno spazio normato, e $D \subset C$ due sottoinsiemi di X tali che C sia convesso e $D + \varepsilon B_X \subset C$ per qualche $\varepsilon > 0$. Se $f\colon C \to \mathbb{R}$ è convessa e limitata, allora f è lipschitziana in D.*
(Si dimostra che, se $|f| \leq M$ in C, allora f è $(\frac{2M}{\varepsilon})$-lipschitziana in D.)

- $\triangle$**Teorema (continuità di funzioni convesse).** *Siano A un insieme aperto convesso in uno spazio normato, e $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora sono equivalenti:*
(i) f è localmente lipschitziana in A;
(ii) f è continua in A;
(iii) f è localmente limitata in A;
(iv) f è continua in alemno un punto di A;
(v) f è limitata superiormente in qualche aperto non vuoto $A_0 \subset A$.

(Sostituendo la (i) con la condizione
(i') *f è localmente uniformemente continua in A,*
si ottiene un teorema valido in ogni s.v.t.)

- **Corollario (continuità di funzionali lineari).** *Sia X uno spazio normato (o s.v.t.). Per un funzionale lineare $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, le seguenti sono equivalenti:*
(i) φ è lipschitziano;
(ii) φ è continuo (cioè, $\varphi \in X^*$);
(iii) φ è continuo in qualche punto;
(iv) φ è limitato in un intorno di 0;
(v) $\operatorname{Ker}\varphi$ non è denso in X.

- $\triangle$**Corollario.** *Sia f una funzione convessa (a valori reali) definita in un aperto convesso $A \subset \mathbb{R}^d$. Allora f è localmente lipschitziana in A.*

- **Corollario.** *Sia C in insieme convesso finito-dimensionale in uno spazio normato (o s.v.t. di Hausdorff) X. Allora ogni funzione convessa $f\colon C \to \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana in $\operatorname{ri} C$.*

- **Corollario.** *Siano X uno spazio normato, $K \subset X$ un insieme convesso compatto, e $f\colon K \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora le seguenti sono equivalenti:*
(i) f è lipschitziana in K;
(ii) f è estendibile ad una funzione convessa $\hat{f}$ definita in un aperto $A \supset K$ e continua in qualche punto di A;
(iii) f è estendibile ad una funzione convessa lipschitziana $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$.

Dimostrazione. L'implicazione $(iii) \Rightarrow (ii)$ è ovvia.
$(ii) \Rightarrow (i)$. (ii) implica che $\hat{f}$ è localmente lipschitziana in A. Dalla compattezza di K segue che esso è contenuto in un'unione finita di bolle aperte su ciascuna delle quali $\hat{f}$ è lipschitziana; e sia L una costante di Lipschitz comune a tutte queste bolle. Un ragionamento per segmenti contenuti in K implica facilmente che $\hat{f}$ è L-lipschitziana in K, cioè, vale (i).
$(i) \Rightarrow (iii)$. Quest'implicazone segue dal seguente teorema generale.
[q.e.d.]

- **Teorema (estensione).** *Siano C un sottoinsieme di uno spazio metrico X, e $f\colon C \to \mathbb{R}$ una funzione L-lipschitziana. Allora la formula*
$$\hat{f}(x) = \inf\bigl\{f(y) + Ld(x,y) : y \in C\bigr\} \qquad (x \in X)$$
definisce una funzione L-lipschitziana $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ che estende f. Inoltre, se X è normato, C è convesso e f è anche convessa, allora l'estensione $\hat{f}$ è convessa.

14/03/2016 [2 ore: n. 9,10]

- **Funzioni semicontinue.** Siano T uno spazio topologico, $t_0 \in T$, $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che f è *semicontinua inferiormente* (*l.s.c.*) in t_0 se t_0 è un punto isolato di T, oppure se t_0 è un punto di accumulazione per T e vale:
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } f(t_0) > \alpha \ \exists U \in \mathcal{U}(t_0) : f(t) > \alpha \text{ in } U.$$
f è *semicont. superiormente* (*u.s.c.*) in t_0 se $(-f)$ è l.s.c. in t_0.
Definiamo inoltre:
$$\liminf_{t \to t_0} f(t) := \sup_{U \in \mathcal{U}(t_0)} \inf_{t \in U \setminus \{t_0\}} f(t)\,.$$
Il seguente teorema si dimostra facilmente dalle definizioni.

- **Teorema.** *Siano T uno spazio topologico, $f\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono equivalenti:*
(i) f è l.s.c. (in ogni punto di T);
(ii) gli insiemi $[f > \alpha]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sono tutti aperti;
(iii) gli insiemi $[f \le \alpha]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sono tutti chiusi;
(iv) per ogni punto di accumulazione $t_0 \in T$, $f(t_0) \le \liminf_{t\to t_0} f(t)$;
(v) $\operatorname{epi} f$ è chiuso in $T \times \mathbb{R}$.

- $\triangle$**Teorema.** *Siano X uno spazio normato (o uno s.v.t.), $A \subset X$ un insieme aperto convesso, $f: A \to \mathbb{R}$.*
  (a) *Se f è u.s.c., allora f è continua.*
  (b) *Se X è Banach e f è l.s.c., allora f è continua.*

Teoremi di Hahn-Banach

- **Teorema (estensione).** *Siano X uno s.v., $Y \subset X$ un sottospazio, $p: X \to \mathbb{R}$ una funzione subadditiva, e $\varphi \in Y^\sharp$ tale che $\varphi \le p$ in Y.*
  (a) [versione algebrica]. *Allora esiste $\hat{\varphi} \in X^\sharp$ che estenda φ, con $\hat{\varphi} \le p$.*
  (b) [versione topologica]. *Se X è normato (o s.v.t.), $y \in Y^*$ e p continua, allora l'estensione $\hat{\varphi}$ dal punto precedente esiste in X^*.*

- *Iperpiani.* Sia H un sottoinsieme di uno s.v. X. Diciamo che H è un *iperpiano* (in X) se H è un insieme affine di codimensione 1. Gli iperpiani sono tutti e soli gli insiemi della forma $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ dove $\varphi \in X^\sharp$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Dato un iperpiano $H = \varphi^{-1}(\alpha)$, l'intero spazio X viene decomposto in: due *semispazi (algebricamente aperti)* $[\varphi > \alpha]$ e $[\varphi < \alpha]$ e l'iperpiano H. Inoltre, se due punti x, y giacciono in due semispazi opposti, allora il segmento (rel. aperto) (x, y) contiene uno e un solo punto di H.

- **Teorema (separazione).** *Siano A, B due insiemi convessi in uno s.v. X.*
  (a) [versione algebrica]. *Se* a-int A *non è vuoto e non interseca B, allora esiste $\varphi \in X^\sharp \setminus \{0\}$ tale che* $\sup \varphi(A) \le \inf \varphi(B)$*; inoltre, $\varphi(a) < \inf \varphi(B)$ per ogni $a \in$* a-int A.
  (b) [versione topologica]. *Se* $\operatorname{int} A$ *non è vuoto e non interseca B, allora esiste $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ tale che* $\sup \varphi(A) \le \inf \varphi(B)$*; inoltre, $\varphi(a) < \inf \varphi(B)$ per ogni $a \in$* $\operatorname{int} A$.
  (c) [versione topologica – separazione forte]. *Se X è localmente convesso, A è compatto, B è chiuso e $A \cap B = \emptyset$, allora esiste $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ tale che* $\sup \varphi(A) < \inf \varphi(B)$.

Punti estremi, insiemi estremi

- Sia C un insieme convesso in uno s.v. X. Un insieme $\emptyset \neq E \subset C$ è un *insieme estremale* per C se vale l'implicazione
$$x, y \in C,\ (x,y) \cap E \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad x, y \in E.$$
Un punto $c \in C$ è un *punto estremo* di C se $\{x\}$ è estremale per C.

- *Esempio.* Se $\varphi \in X^\sharp \setminus \{0\}$, $\sup \varphi(C) = s < +\infty$ e $E := C \cap [\varphi = s] \neq \emptyset$, allora E è estremale per C.

17/03/2016 [2 ore: n. 11,12]

- *Osservazioni.*
  1) $x \in \operatorname{ext} C \ \Leftrightarrow\ \big[y, z \in C,\ x = \frac{y+z}{2} \ \Rightarrow\ y = z = x \big]$.
  2) C è estremale per se stesso.
  3) Se $F \subset E \subset C$, F è estremale per E e E è, a sua volta, estremale per C, allora F è estremale per C.

- **Problemino per voi**. Siano $\emptyset \neq E \subset C \subset X$, C convesso. Dimostrare che E è estremale per C se e solo se:
$$\Big[x, y \in C,\ \tfrac{x+y}{2} \in E \quad \Rightarrow \quad x, y \in E \Big].$$

- $\triangle$**Teorema di Minkowski.** *Siano X uno spazio normato (o s.v.t. di Hausdorff) e $K \subset X$ un insieme compatto convesso di dimensione finita. Allora*
$$K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K).$$

- $\triangle$**Corollario (principio di massimo).** *Siano X, K come sopra, e sia $f \colon K \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora* $\sup f(K) = \sup f(\operatorname{ext} K)$. *Inoltre, se f assume il valore* $\sup f(K)$ *allora lo assume in almeno un punto estremo di K.*

- $\triangle$**Teorema.** *Siano X uno spazio normato (o s.v.t. di Hausdorff) e $K \subset X$ un insieme compatto convesso di dimensione finita. Per un insieme $A \subset K$, le seguenti sono equivalenti:*
  (i) $K = \operatorname{conv} A$;
  (ii) $A \supset \operatorname{ext} K$.

- Lemma di Zorn – ripasso.

- $\triangle$**Lemma base.** *Siano X uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff, $K \subset X$ un insieme compatto convesso. Allora ogni insieme estremale chiuso $E \subset K$ contiene almeno un punto estremo di K.*

  (*Idea della dimostrazione.* Usare il lemma di Zorn per dimostrare che la famiglia di tutti i sottoinsiemi estremali e chiusi di K, contenuti in E, ammette un elemento minimale.)

- $\triangle$**Teorema di Krein–Milman.** *Siano X uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff, $K \subset X$ un insieme compatto convesso. Allora*
$$K = \overline{\mathrm{conv}}\,(\mathrm{ext}\, K).$$

- $\triangle$**Teorema (principio di massimo di Bauer).** *Siano X, K come nel teorema di Krein–Milman, e $f\colon K \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e u.s.c. Allora f assume il suo massimo su K in almeno un punto di* $\mathrm{ext}\, K$.

  (*Idea.* Applicare il "lemma base" all'insieme estremale $E = \{x \in K : f(x) = \max f(K)\}$.)

21/03/2016 [2 ore: n. 13,14]

- **Teorema.** *Siano X uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff, $K \subset X$ un insieme compatto convesso. Per un insieme $A \subset K$, le seguenti sono equivalenti:*
  (i) $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}\, K)$;
  (ii) $\overline{A} \supset \mathrm{ext}\, K$.
  L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ è nota come il **teorema di Milman**.

- *Esempio.* Nello spazio di Banach ℓ_2, consideriamo l'insieme compatto convesso
$$K = \overline{\mathrm{conv}}\left[\{\tfrac{1}{n}e_n\}_1^{+\infty} \cup \{0\}\right]$$
  (dove $\{e_n\}_1^{+\infty}$ è la base ortonormale standard dello spazio di Hilbert ℓ_2). Dal teorema di Milman si deduce che
$$\mathrm{ext}\, K \subset A := \{\tfrac{1}{n}e_n\}_1^{+\infty} \cup \{0\}.$$
  E' facile vedere che $\mathrm{ext}\, K = A$. Ora,
$$K \neq \mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\, K)$$
  in quanto l'insieme a destra non è chiuso (lo sappiamo già).

- **Proposizione.** Siano X uno spazio normato (o s.v.t. di Hausdorff) e $K \subset X$ un insieme compatto convesso finito-dimensionale.
  (a) Se $\dim K \leq 2$, allora $\operatorname{ext} K$ è un insieme chiuso.
  (b) Se $\dim K > 2$, allora $\operatorname{ext} K$ può non essere chiuso.

- $\triangle$**Teorema (Choquet).** *Siano X uno s.v.t., e $K \subset X$ un insieme compatto convesso. Se K è metrizzabile, allora* $\operatorname{ext} K$ *è un insieme di tipo G_δ in K.*

- *Commento.* Siano (X, τ) uno s.v.t. di Hausdorff, e $K \subset X$ un insieme compatto. Se esiste una successione $\{\varphi_n\} \subset X^*$ che separi i punti di K, allora K è metrizzabile.

  Idea. Poniamo $s_n := \sup |\varphi_n|(K)$, e definiamo
  $$d(x, y) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\varphi_n(x-y)|}{1+s_n}, \qquad x, y \in K.$$
  Allora d è una metrica su K e l'identità
  $$I_K \colon (K, \tau) \to (K, d)\,, \quad I_K(x) = x\,,$$
  è continua.

- *Due esempi "patologici".*
  (a) [**Bishop–De Leuw**] Esistono uno s.v.t. di Hausdorff X e un insieme convesso compatto $K \subset X$ con l'insieme $\operatorname{ext} K$ non boreliano.
  (b) [**Roberts**] Nello spazio vettoriale metrico $L_{1/2}[0,1]$ (dove la metrica è data da $d(x,y) = \int_0^1 \sqrt{|x(t) - y(t)|}\, dt$), esiste un insieme compatto convesso K privo di punti estremi.

- **Un approfondimento.**

  ◦ *Integrale di Pettis.* Siano (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura e X uno s.v.t. localmente convesso. Sia $F \colon \Omega \to X$ un'applicazione misurabile (nel senso che le controimmagini degli aperti appartengono a Σ). Sia $x_0 \in X$. Ora definiamo:
  $$(\mathcal{P})\int_\Omega F\, d\mu \equiv (\mathcal{P})\int_\Omega F(\omega)\, d\mu(\omega) = x_0$$
  se e solo se
  $$\forall x^* \in X^* : \qquad \int_\Omega x^*(F(\omega))\, d\mu(\omega) = x^*(x_0)\,.$$

Ciò può essere riassunto nella seguente equivalenza:

$$x^*\left((\mathcal{P})\int_\Omega F\,d\mu\right) = \int_\Omega (x^*\circ F)\,d\mu\,, \qquad x^*\in X^*.$$

- Dal fatto che, nel nostro caso, X^* separa i punti di X segue facilmente che l'integrale di Pettis, se esiste, è unico.
- *Osservazione.* Se $x=\sum_1^n \lambda_i y_i$ è una combinazione convessa, allora possiamo scrivere
$$x = (\mathcal{P})\int x\,d\mu(x)$$
dove $\mu=\sum_1^n \lambda_i\delta_{y_i}$ (dove δ_z denota la misura di Dirac nel punto z) è una misura di probabilità concentrata su $\operatorname{conv}\{y_1,\dots,y_n\}$. (Qui si sta integrando l'identità $x\mapsto x$.)
- **Teorema.** *Siano X uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff, $K\subset X$ un insieme compatto convesso.*
  - *(a) Se $B\subset K$ è un insieme boreliano e μ è una misura regolare di probabilità su B, allora esiste l'integrale di Pettis*
  $$(\mathcal{P})\int_B y\,d\mu(y)$$
  e appartiene a K.
  - *(b)* (Forma integrale del teorema di Krein–Milman.) *Per ogni $x\in K$ esiste una misura regolare di probabilità μ su $\overline{\operatorname{ext} K}$ tale che*
  $$x = (\mathcal{P})\int_{\overline{\operatorname{ext} K}} x\,d\mu(x)$$
  (cioè, x è una "combinazione convessa integrale" di elementi di $\overline{\operatorname{ext} K}$).
  - *(c)* (Choquet.) *Se K è metrizzabile, allora la misura μ dal punto precedente esiste su $\operatorname{ext} K$ (che è del tipo G_δ).*
- **Corollario.** Siano X uno s.v.t. loc. convesso di Hausdorff, $K\subset X$ un insieme convesso compatto metrizzabile. Se $\operatorname{ext} K$ è numerabile con $\operatorname{ext} K=\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, allora ogni $x\in K$ può essere scritto come una "combinazione convessa infinita"
$$x=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n e_n \qquad (\text{dove } \lambda_n\ge 0,\ \sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_k = 1).$$

31/03/2016 [2 ore: n. 15,16]

Topologie deboli – ripasso

- **Teorema (topologie del tipo $\sigma(X, L)$).**
  Siano X uno s.v., L un sottospazio del duale algebrico $X^\sharp$, τ una topologia su X.
  1. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*
  (i) τ *è la topologia meno forte che renda continui gli elementi di L;*
  (ii) τ *è la topologia vettoriale meno forte con $(X, \tau)^* = L$;*
  (iii) τ *è la topologia di X come sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^L$* (nel senso che ogni $x \in X$ possiamo vedere come l'elemento $(\ell(x))_{\ell\in L}$ di $\mathbb{R}^L := \prod_{\ell\in L} \mathbb{R}$, con la topologia del prodotto)*;*
  (iv) per ogni $x \in X$, una base degli intorni di $\mathcal{U}(x)$ è costituita dagli insiemi $x + V_{F,\varepsilon}$ ($F \subset L$ finito, $\varepsilon > 0$) dove
  $$V_{F,\varepsilon} = \{y \in X : \ |\ell(x)| < \varepsilon \text{ per ogni } \ell \in F\}.$$
  2. *La (unica) topologia τ che soddisfi le condizioni del punto precedente viene denotata con*
  $$\sigma(X, L)$$
  ed è una topologia vettoriale localmente convessa. Inoltre: $\sigma(X, L)$ è di Hausdorff $\Leftrightarrow$ L separa i punti di X $\Leftrightarrow$ ${}^\perp L := \bigcap_{\ell\in L} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0\}$ ("L è totale su X").

- **Casi particolari – le topologie deboli.** Sia X uno spazio normato (o uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff).
  (a) La *topologia debole* di X è la topologia
  $$w := \sigma(X, X^*).$$
  Siccome X^* separa i punti di X (teorema di Hahn-Banach!), la topologia debole w è una topologia vettoriale localmente convessa di Hausdorff e soddisfa $(X, w)^* = X^*$.
  (b) *La topologia debole** di X^*.
  Su X^*, oltre alla sua topologia debole $w = \sigma(X^*, X^{**})$, possiamo considerare anche la topologia
  $$\sigma(X^*, X)$$
  (considerando gli elementi di X come funzionali lineari su X^*). La topologia w^* è una topologia vettoriale localmente convessa di Hausdorff (X ovviamente separa i punti di X^*!) che soddisfa $(X^*, w^*)^* = X$.

- **Immersione canonica nel biduale; riflessività.**
[Non fatto a lezione in quanto contenuto nei programmi di Analisi Funzionale, ma è da sapere.]
Sia X uno spazio normato. Ad ogni $x \in X$ possiamo associare un funzionale lineare $\hat{x} \colon X^* \to \mathbb{R}$, dato da
$$\hat{x}(y^*) := y^*(x).$$
E' ben noto che $\hat{x} \in X^{**}$ e che $\|\hat{x}\| = \|x\|$. In questo modo, l'applicazione (detta *immersione canonica*)
$$X \ni x \mapsto \hat{x} \in X^{**}$$
è un'isometria lineare tra X e un sottospazio $\hat{X} \subset X^{**}$. In questo modo, possiamo considerare X come un sottospazio di X^{**} (identificando X con $\hat{X}$).
Lo spazio X viene detto *riflessivo* se $X = X^{**}$ (cioè, $\hat{X} = X^{**}$). Si noti che se X è riflessivo allora X è uno spazio di Banach (in quanto il duale di uno spazio normato è sempre completo) e
$$(X^*, w) = (X^*, w^*).$$
E' noto che X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.

- **Alcuni noti risultati sulle topologie deboli.** Sia X uno spazio normato. Siano B_X e B_{X^*} le bolle unitarie chiuse rispettivamente di X e di X^*.
  - **(a)** Per le topologie su X: $w \preceq \|\cdot\|$, e l'uguaglianza vale se e solo se X è finito dimensionale.
  - **(b)** Per le topologie su X^*: $w^* \preceq w \preceq \|\cdot\|$, e l'uguaglianza $w^* = w$ vale se e solo se X è uno spazio di Banach riflessivo.
  - **(c)** (B_{X^*}, w^*) è compatto [teorema di Banach-Alaoglu].
  - **(d)** (B_X, w) è compatto se e solo se X è uno spazio di Banach riflessivo.
  - **(e)** $(B_X, \|\cdot\|)$ è compatto se e solo se X è finito dimensionale.
  - **(f)** X è w^*-denso in X^{**}, e B_X è w^*-denso in $B_{X^{**}}$ [teorema di Goldstine].

- $\triangle$**Teorema.** *Siano X uno spazio normato (o uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff), $C \subset X$ un insieme convesso. Allora C è chiuso se e solo se è w-chiuso.*

  Idea. Una implicazione è ovvia. Per dimostrare l'altra, supponiamo che $C \neq \emptyset$ sia chiuso (nella topologia della norma) e $x \in X \setminus C$. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste $u^* \in X^*$ tale che $u^*(x) > \sup u^*(C) =: \sigma$. Allora il semispazio aperto $[u^* > \sigma]$ è un insieme

w-aperto contenente x e disgiunto da C. Ciò dimostra che $X \setminus C$ è w-aperto.

- **Esercizio per voi.** Siano X, Y spazi normati. Allora possiamo identificare
$$(X \times Y)^* = X^* \times Y^*$$
e anche
$$(X \times Y, w) = (X, w) \times (Y, w).$$
In particolare, $(X \times \mathbb{R}, w) = (X, w) \times \mathbb{R}$.

- **Corollario.** Sia X uno spazio normato.
  (a) *Se X è riflessivo e $C \subset X$ è convesso, chiuso e limitato, allora C è w-compatto.*
  (Infatti, C è w-chiuso ed è contenuto in una bolla chiusa che è w-compatta.)
  (b) $\triangle$ *Se $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa, allora essa è l.s.c. se e solo se è w-l.s.c.*
  (Infatti, l'epigrafo epi f, essendo convesso, è chiuso se e solo se è w-chiuso.)

- **Teorema (tipo Weierstrass).**
Siano T uno spazio topologico compatto, $f\colon T \to (-\infty, +\infty]$ una funzione l.s.c. Allora f asssume il suo minimo su X.
(Idea della dimostrazione: considerare una successione strettamente decrescente $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ tale che $\alpha_n \to \alpha := \inf f(T)$ e gli insiemi [compatti!] $K_n := [f \le \alpha_n]$, e dedurre che $[f = \alpha] = [f \le \alpha] = \bigcap_n K_n \ne \emptyset$.)

- $\triangle$**TEOREMA (minimizzazione).** *Siano X uno spazio di Banach, $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ una funzione tale che*
$$\liminf_{\|x\| \to +\infty} f(x) > \inf f(X)$$
(ciò viene soddisfatto, ad esempio, quando f è coerciva *e* propria*, cioè,*
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad f \not\equiv +\infty \text{).}$$
Supponiamo inoltre che valga almeno una *delle seguenti condizioni:*
(a) X è riflessivo e f è convessa e l.s.c.;
(b) X è riflessivo e f è w-l.s.c.;
(c) $X = Y^*$ (con Y spazio normato) e f è w^*-l.s.c.

Allora f asume il suo minimo su X.

Dimostrazione.
(c) Dall'ipotesi su f si deduce che esiste $r > 0$ tale che

$$\inf f(X) = \inf f(rB_X)\,,$$

e l'ultimo "inf" viene assunto perché $rB_X = rB_{Y^*}$ è w^*-compatta.
(b) Segue direttamente da (c).
(a) Segue direttamente da (b), usando l'ultimo Corollario.

Un'applicazione: esistenza di centri di Chebyshev

- Sia A un insieme limitato in uno spazio normato X. Diciamo che $x_0 \in X$ è un *centro di Chebyshev* di A se x_0 minimizza la funzione della "maggior deviazione"

$$\varphi(x) := \sup_{a \in A} \|x - a\| \qquad (x \in X).$$

- *Osservazioni.*
  (a) La norma di X è convessa e 1-lipschitziana, ed è anche w^*-l.s.c. se X è uno spazio duale.
  (b) Di consegeunza, la funzione φ (v. sopra) è convessa e 1-lipschitziana, ed è anche w^*-l.s.c. se $X = Y^*$.
  (c) La funzione φ è coerciva.

- $\triangle$**Corollario (esistenza di centri di Chebyshev).** *Sia X uno spazio di Banach. Se X è uno spazio duale (in particolare, se X è riflessivo), allora ogni insieme limitato $\emptyset \neq A \subset X$ ammette almeno un centro di Chebyshev.*

- **Curiosità – ulteriori risultati su centri di Chebyshev.**
  1. Esistono anche altri spazi di Banach, non soddisfacenti le ipotesi dell'ultimo Corollario, in cui ogni insieme limitato ha almeno un centro di Chebyshev. Tali sono, ad esempio, gli spazi

     $$c_0\,, \quad c\,, \quad C(K)\,, \quad C(K,Y) \text{ con } Y \text{ spazio di Hilbert}, \quad L_1[0,1]$$

     (nelle loro norme standard).
  2. *Unicità.* Sia X uno spazio di Banach.
     - Ogni insieme finito $\emptyset \neq F \subset X$ ammette al più un centro di Chebyshev se e solo se X è *strettamente convesso* (cioè, $S_X := \partial B_X$ non contiene segmenti non banali).

- ◦ Ogni insieme limitato $\emptyset \neq A \subset X$ ammette al più un centro di Chebyshev se e solo se X è "uniformemente convesso in ogni direzione" (che è una proprietà più forte della stretta convessità). Ad esempio, gli spazi di Hilbert e gli spazi uniformemente convessi (tra cui tutti gli spazi del tipo $L_p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$) hanno questa proprietà.

3. *Corollario.* Se X è uno spazio di Hilbert oppure, per qualche $p \in (1, +\infty)$, $X = L_p[0,1]$ oppure $X = \ell_p$, allora ogni sottoinsieme limitato di X ammette un unico centro di Chebyshev. (Infatti, tali spazi sono tutti riflessivi.)
4. *Non esistenza.* Se X è uno spazio di Banach non riflessivo, allora esiste una norma equivalente $|||\cdot|||$ su X tale che qualche insieme di tre punti non ammette centri di Chebyshev in $(X, |||\cdot|||)$.
(Due norme $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ sullo stesso spazio X sono dette *equivalenti* se esistono costanti $b \geq a > 0$ tali che $a\|\cdot\| \leq |||\cdot||| \leq b\|\cdot\|$, il che significa che la mappa dell'identità è un omeomorfismo tra $(X, \|\cdot\|)$ e $(X, |||\cdot|||)$.)

04/04/2016 [2 ore: n. 17,18]

Applicazione II: insiemi prossiminali

- *Definizione.* Sia A un insieme non vuoto in uno spazio metrico (X, d). Per $x \in X$, definiamo:
$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)\,,$$
$$P_A(x) = \{a \in A : d(x, a) = \mathrm{dist}(x, A)\}\,.$$
L'insieme, possibilmente vuoto, $P_A(x)$ è la *proiezione metrica* di x in A. Denotando con $B(x, r)$ la bolla chiusa di centro x e raggio $r \geq 0$, osserviamo che $P_A(x) = A \cap B(x, \mathrm{dist}(x, A))$.
A è detto *prossiminale* se $P_A(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$.

- **Osservazioni.**
(a) $x \in A \Leftrightarrow P_A(x) = \{x\}$; $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \mathrm{dist}(x, A) = 0$.
(b) Se A è prossiminale allora è necessariamente chiuso, ma non vale il vice versa (infatti, basta prendere come A il nucleo di un qualsiasi funzionale $f \in X^*$ [X è uno spazio normato] che non assuma la sua norma [cioè, il "sup" che definisce $\|f\|$ non è un massimo]).

(c) Se A è compatto, allora è anche prossiminale, ma non vale il vice versa (infatti, la bolla unitaria chiusa B_X di uno spazio normato è sempre prossiminale).

- $\triangle$**Teorema.** *Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme di uno spazio di Banach X. Se vale* almeno una *delle seguenti condizioni, allora A è prossiminale.*
  (a) X è duale, A è w^*-chiuso.
  (b) X è risflessivo, A è w-chiuso.
  (c) X è riflessivo, A è chiuso e convesso.

- **Corollario.** *Per uno spazio di Banach, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
  (i) X è riflessivo;
  (ii) ogni sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di X è prossimale;
  (iii) ogni iperpiano chiuso di X è prossiminale.

  Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ segue dal Teorema precedente, mentre $(ii) \Rightarrow (iii)$ è ovvia. Infine, (iii) equivale a dire che ogni $f \in X^*$ assume la sua norma; per il *teorema di James* [un teorema importante di cui dimostreremo il caso separabile più avanti], vale (i).

- **Esercizio per voi.** Se X è riflessivo e strettamente convesso, allora ogni sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto $C \subset X$ è un *insieme di Chebyshev*, cioè, $\operatorname{card} P_C(x) = 1$ per ogni $x \in X$.
  (Ad esempio, tutti gli spazi del tipo $L_p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$ sono riflessivi e strettamente convessi. In particolare, sono tali tutti gli spazi di Hilbert.)

- *Commento storico.* Il matematico russo *P.L. Chebyshëv* (vissuto nel XIX secolo) ha dimostrato che, nello spazio normato $C[a,b]$, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ il sottospazio (finito-dimensionale) dei polinomi di grado $\leq n$ è un insieme di Chebyshev.

- **Un problema aperto famoso (V. Klee).** Sia X lo spazio di Hilbert separabile (cioè, $X = \ell_2$). Se $A \subset X$ è un insieme di Chebyshev, è A necessariamente convesso?

Dualità di insiemi convessi: polari, coni duali, annullatori

- **Il polare.** Siano X uno spazio normato (o s.v.t. loc. convesso, T_2), $A \subset X$, $B \subset X^*$. Definiamo il *polare* di A e il *pre-polare* di B come segue:
$$A^\circ := \{x^* \in X^* : \ x^*(a) \leq 1 \text{ per ogni } a \in A\},$$
$$^\circ B := \{x \in X : \ b^*(x) \leq 1 \text{ per ogni } b^* \in B\}.$$

- **Proprietà dei polari.** Siano X, A, B come sopra.
  1. Se $A_1 \subset A_2$ allora $A_1^\circ \supset A_2^\circ$; e analogamente per i pre-polari.
  2. Se $t > 0$ allora $(tA)^\circ = (1/t)A^\circ$; e analogamente per i pre-polari.
  3. $(B_X)^\circ = B_{X^*}$; $^\circ(B_{X^*}) = B_X$.
  4. A° è sempre convesso, w^*-chiuso e contiene 0.
  Analogamente, $^\circ B$ è sempre convesso, chiuso e contiene 0.
  5. $\triangle$ *Teorema.* $^\circ(A^\circ) = \overline{\text{conv}}(A \cup \{0\})$; $(^\circ B)^\circ = \overline{\text{conv}}^{w^*}(B \cup \{0\})$.
  6. $\triangle$ *Corollario.* Se A è convesso, chiuso e $0 \in A$, allora $^\circ(A^\circ) = A$.
  Analogamente, se B è convesso, w^*-chiuso e $0 \in B$, allora $(^\circ B)^\circ = B$.

- $\triangle$**Corollario.** Sia X come sopra, e denotiamo
$$\mathcal{C} := \{C \subset X : \ C \text{ è chiuso, convesso, } 0 \in C\},$$
$$\mathcal{C}_* := \{D \subset X^* : \ D \text{ è } w^*\text{-chiuso, convesso, } 0 \in D\}.$$
Allora le applicazioni
$$\mathcal{C} \ni C \mapsto C^\circ\,, \qquad \mathcal{C}_* \ni D \mapsto {}^\circ D$$
definiscono *una corrispondenza biunivoca tra le famiglie* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}_*$.

- **Dualità di coni convessi.** Sia X come sopra. Un insieme $\emptyset \neq P \subset X$ è un *cono* se, $tP \subset P$ per ogni $t \geq 0$.
Dati coni convessi $P \subset X$ e $Q \subset X^*$, i coni duale di P e preduale di Q sono definiti con
$$P^* := \{x^* \in X^* : x^*|_P \geq 0\},$$
$$^*Q := \{x \in X : x|_Q \geq 0\}.$$
E' facile vedere che P^* e $^*Q$ sono effettivamente dei coni convessi (il primo w^*-chiuso, il secondo chiuso). Inoltre,
$$P^* = -P^\circ\,, \quad ^*Q = -(^\circ Q)\,.$$
Così otteniamo il seguente corollario.

- **Corollario.** Sia X come sopra, e denotiamo

$$\mathcal{P} := \{P \subset X : \; P \text{ è un cono convesso chiuso}\},$$
$$\mathcal{P}_* := \{Q \subset X^* : \; Q \text{ è un cono convesso } w^*\text{-chiuso}\}.$$

  Allora le applicazioni

$$\mathcal{P} \ni P \mapsto P^*, \qquad \mathcal{P}_* \ni Q \mapsto {}^*Q$$

  definiscono *una corrispondenza biunivoca tra le famiglie $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_*$.*

- **Annullatori.** Sia X sempre come sopra. Dati due sottospazi $Y \subset X$ e $Z \subset X^*$, definiamo i loro *annullatori* come segue:

$$Y^\perp := \{x^* \in X^* : x^*|_Y \equiv 0\},$$
$${}^\perp Z := \{x \in X : x|_Z \equiv 0\}.$$

  Anch'essi sono dei sottospazi (il primo w^*-chiuso, il secondo chiuso), e si ha che

$$Y^\perp = Y^\circ, \qquad {}^\perp Z = {}^\circ Z.$$

- **Corollario.** Denotando

$$\mathcal{S} := \{Y \subset X : \; Y \text{ è un sottospazio chiuso}\},$$
$$\mathcal{S}_* := \{Z \subset X^* : \; Z \text{ è un sottospazio } w^*\text{-chiuso}\},$$

  le applicazioni

$$\mathcal{S} \ni Y \mapsto Y^\perp, \qquad \mathcal{S}_* \ni Z \mapsto {}^\perp Z$$

  definiscono *una corrispondenza biunivoca tra le famiglie $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_*$.*

07/04/2016 [2 ore: n. 19,20]

- $\triangle$ *Ancora un commento sui polari.* Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_*$ le due classi definite la volta scorsa. Siano $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{C}_*$ tali che $C^\circ = D$ (e quindi ${}^\circ D = C$). Allora:
  (a) C è limitato se e solo se $0 \in \operatorname{int} D$;
  (b) $0 \in \operatorname{int} C$ se e solo se D è limitato.

- **Dualità di funzioni convesse** *[non dimostrato].*
  Sia X uno spazio normato (o s.v.t. loc. convesso T_2). Allora le classi di funzioni
  $$\mathcal{F} := \big\{f\colon X \to (-\infty, +\infty] :\ f \text{ è convessa e l.s.c., } f \not\equiv +\infty\big\}\,,$$
  $$\mathcal{F}_* : \big\{g\colon X^* \to (-\infty, +\infty] :\ g \text{ è convessa e } w^*\text{-l.s.c., } g \not\equiv +\infty\big\}$$
  sono in corrispondenza biunivoca attraverso le relazioni
  $$f \mapsto f^*\,, \qquad g \mapsto {}^*g\,,$$
  definite come segue:
  $$f^*(x^*) := \sup[x^* - f](X)\,, \qquad {}^*g(x) := \sup[x - g](X^*)\,.$$

Funzionali di supporto e punti di supporto. Il teorema di Bishop–Phelps

- *Introduzione, motivazione.*
  Teorema. Per uno spazio di Banach, le seguenti sono equivalenti:
  (i) X è riflessivo;
  (ii) B_X è w-compatta;
  (iii) ogni elemento di X^* assume la sua norma.
  L'unica implicazione non semplice è la $(iii) \Rightarrow (i)$, che è il famoso *teorema di James* (la cui versione separabile dimostreremo).
  E' naturale chiedersi: *se X non è riflessivo, può succedere che non esistano elementi di $X^* \setminus \{0\}$ che assumano la norma? E se no, possono esservene pochi?*
  Ecco *due risposte*:
  L'insieme $\mathcal{N}$ dei funzionali che assumono la norma è denso in X^* (questo è il *teorema di Bishop–Phelps* [1961] che dimostreremo).
  Ogni aperto relativo non vuoto di S_{X^*} contiene un'infinità non numerabile di elementi di $\mathcal{N}$ [De Bernardi e Vesely, 2009].

- **Definizione.** Siano X uno spazio normato, $C \subset X$ un insieme, $x \in C$ e $f \in X^* \setminus \{0\}$. Se
  $$f(x) = \sup f(C)\,,$$
  diciamo che f è un *funzionale di supporto* per C (in x) e che x è un *punto di supporto* per C (supportato da f).

- *Prime osservazioni.* Siano X, C come sopra con C chiuso e convesso.
  (i) Se $0 \in \operatorname{int} C$ allora ogni punto di ∂C è un punto di supporto per C.

(ii) Se C è w-compatto allora ogni $f \in X^* \setminus \{0\}$ è un funzionale di supporto per C.

- *Idea di come produrre punti e funzionali di supporto:* toccare l'insieme convesso chiuso C da fuori con un cono avente punti interni, e utilizzare il teorema di Hahn-Banach di separazione.

- **I coni.** Siano X uno spazio normato, $f \in S_X$, $0 < \alpha < 1$. Allora l'insieme
$$K(f,\alpha) := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\|x\|\} = \big[\alpha\|\cdot\| - f \leq 0\big]$$
non è vuoto, è un cono convesso chiuso e il suo interno (non vuoto!) è
$$\operatorname{int} K(f,\alpha) = \big[\alpha\|\cdot\| - f < 0\big].$$
[Significato geometrico di $K(f,\alpha)$.]

- **Osservazione.** *Per $\varepsilon > 0$, consideriamo l'insieme*
$$L := K(f,\alpha) \cap [f \leq \varepsilon]$$
(che è una "fetta" del cono $K(f,\alpha)$). Allora $\operatorname{diam} L \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}$.

- **Lemma tecnico.** *Siano $f, g \in S_{X^*}$ e $\alpha \in (0,1)$. Supponiamo che $K(f,\alpha) \subset [g \geq 0]$. Allora $\|g - f\| \leq 2\alpha$.*

- $\triangle$*Osservazione.* Siano $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$ infiniti insiemi chiusi inscatolati in uno spazio metrico completo. Se $\operatorname{diam} C_n \to 0$ allora l'intersezione
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$$
non è vuota, e quindi contiene un unico punto.

- $\triangle$**Teorema base.** *Siano X uno spazio di Banach, $C \subset X$ un insieme convesso e chiuso, $f \in S_{X^*}$ e $x \in C$ tali che*
$$f(x) \geq \sup f(C) - \varepsilon.$$
Allora, per ogni $\alpha \in (0,1)$, esistono $g \in S_{X^*}$ e $y \in C$ tali che
$$g(y) = \sup g(C)\,, \quad \|g - f\| \leq 2\alpha\,, \quad \|y - x\| \leq \tfrac{4\varepsilon}{\alpha}\,.$$
(In particolare, g è un funzionale di supporto e y un punto di supporto per C.)

Schema della dimostrazione. Sia $\{\varepsilon_k\} \subset (0,+\infty)$ tale che $\varepsilon_1 = \varepsilon$ e $\sum_1^{+\infty} \varepsilon_k \leq 2\varepsilon$. Costruire induttivamente insiemi C_k, punti x_k e numeri reali s_k come segue.
(a) $C_1 := C$, $x_1 := x$, $s_1 := \sup f(C)$ (e quindi $f(x_1) \geq s_1 - \varepsilon_1$).

(b) Se siamo già arrivati a un indice k, poniamo

$$C_{k+1} := C_k \cap \big[x_k + K(f,\alpha)\big], \quad s_{k+1} := \sup f(C_{k+1})$$

e scegliamo $x_{k+1} \in C_{k+1}$ in modo che

$$f(x_{k+1}) \geq s_{k+1} - \varepsilon_{k+1}.$$

Siccome $x_k, x_{k+1} \in C_{k+1}$, si calcola che $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \operatorname{diam} C_{k+1} \leq \frac{2\varepsilon_k}{\alpha}$. Essendo la successione $\{x_k\}$ di Cauchy, essa converge a qualche $y \in C$ il quale ovviamente soddisfa

$$\textstyle\bigcap_n C_n = \{y\}.$$

Si ha $C \cap [y + K(f,\alpha)] = \{y\}$, e quindi esiste un funzionale $g \in S_{X^*}$ che separi C e $y + K(f,\alpha)$:

$$\sup g(C) = g(y) = g(y) + \inf K(f,\alpha).$$

Siccome $K(f,\alpha) \subset [g \geq 0]$, otteniamo $\|g - f\| \leq 2\alpha$ (Lemma tecnico).

08/04/2016 [2 ore: n. 21,22]

- *Osservazione.* Se, nel Teorema base, consideriamo $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ dove $\varepsilon \in (0,1)$, otteniamo come conclusione che

$$\|g - f\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\,, \quad \|y - x\| \leq 4\sqrt{\varepsilon}\,.$$

- $\triangle$**Corollario 1 (teorema di Bishop–Phelps, 1963).**
Sia C un sottoinsieme proprio, convesso e chiuso di uno spazio di Banach X. Denotiamo

$$\Omega(C) := \{f \in S_{X^*} : \sup f(C) < +\infty\}$$

(che coincide con S_{X^*} qualora C sia limitato!). Allora:
(a) i funzionali $f \in S_{X^*}$ di supporto per C sono densi in $\Omega(C)$;
(b) i punti di supporto per C sono densi in ∂C.

- $\triangle$**Corollario 2.** *Se X è uno spazio di Banach, allora i funzionali che assumono la norma sono densi in X^* (e quelli di norma 1 sono densi in S_{X^*}).*

- *Una curiosità.* Phelps [1957] ha dimostrato che esiste uno spazio normato (incompleto) X per cui gli elementi di X^* che assumano la norma non sono densi in X^*.

- **Proposizione ("Bishop-Phelps duale").** *Siano X uno spazio di Banach e $D \subset X^*$ un insieme convesso w^*-compatto con* $\operatorname{int} D \neq \emptyset$. *Allora l'insieme*

$$w^*\text{-supp}\, D := \big\{x^* \in D : \ \exists x \in X \setminus \{0\} \ \textit{con} \ x(x^*) = \sup x(D)\big\}$$

è denso (nella topologia della norma) in ∂D.

Schema della dimostrazione. Possiamo supporre che $0 \in \operatorname{int} D$. Gli insiemi $C := {}^\circ D \subset X$ e $\widetilde{C} = D^\circ \subset X^{**}$ sono limitati, contengono l'origine come punto interno, e soddisfano $\widetilde{C} = \overline{C}^{w^*}$ (w^*-chiusura in X^{**}). Fissiamo un qualsiasi $x^* \in \partial D$. Per Hahn-Banach, esiste $x^{**} \in X^{**}$ tale che $x^{**}(x^*) = 1 = \sup x^{**}(D)$. Si ha quindi $x^{**} \in \widetilde{C}$ e $x^*(x^{**}) = 1 = \sup x^*(\widetilde{C}) = \sup x^*(C)$. Per Bishop-Phelps, arbitrariamente vicino a x^* esiste un funzionale di supporto y^* per C, cioè, per qualche $y \in C$, $y^*(y) = \sup y^*(C)$. Siccome il numero reale $\sigma(y^*) := \sup y^*(C)$ è arbitrariamente vicino a $\sigma(x^*) = 1$, il punto $z^* := \frac{y^*}{\sigma(y^*)}$ è arbitrariamente vicino a y^*, e quindi anche a x^*. Inoltre, $z^*(y) = 1 = \sup z^*(C)$ implica che $z^* \in C^\circ = D$ e $y(z^*) = 1 = \sup y(D)$, cioè, $z^* \in w^*\text{-supp}\, D$.

- **Teorema (Phelps, 1964).** *La Proposizione precedente vale anche senza l'ipotesi che D abbia punti interni.* [Non dimostrato.]

Le ***boundary*** e il teorema di James

- **Definizione.** Siano X uno spazio normato e $K \subset X^*$ un insieme convesso w^*-compatto. Un insieme $B \subset K$ è detto una *boundary* (di James) per K se ogni elemento di X assume il suo massimo su K in qualche punto di B.

- *Esempi di boundary:*
  (a) $B = K$;
  (b) $B = \partial K$;
  (c) $B = \operatorname{ext} K$ (segue dal principio di massimo di Bauer).

- $\triangle$**Esercizio per voi.** Siano X, K come sopra e sia B una boundary per K. Allora

$$K = \overline{\text{conv}}^{w^*} B\,.$$

- **Teorema (sulle boundary).** *Siano X uno spazio di Banach e $K \subset X^*$ un insieme convesso w^*-compatto. Se $\{C_n\}$ è una successione di convessi w^*-compatti la cui unione contenga una boundary B per K, allora*
$$K \subset \overline{\mathrm{conv}}\left(\bigcup_n C_n\right) \quad \textit{(chiusura nella norma!).}$$
[Lo dimostreremo dopo aver dato dei corollari importanti.]

- △**Corollario 1.** *Siano X uno spazio di Banach, $K \subset X^*$ un convesso w^*-compatto, B una boundary per K, $\{x_n\} \subset X$ una successione limitata e $x \in X$. Supponiamo che*
$$b^*(x_n) \to b^*(x) \quad \textit{per ogni } b^* \in B.$$
Allora $y^*(x_n) \to y^*(x)$ per ogni $y^* \in K$.

- △**Corollario 2 (teorema di Rainwater).** *Siano $\{x_n\}$ una successione limitata in uno spazio di Banach X, $x \in X$. Se*
$$e^*(x_n) \to e^*(x) \quad \textit{per ogni } e^* \in \mathrm{ext}\, B_{X^*},$$
allora $x_n \to x$.

11/04/2016 [2 ore: n. 23,24]

- △**Corollario 3 (Rodé 1981, Godefroy 1987).** *Siano X uno spazio di Banach, $C \subset X^*$ un insieme convesso, chiuso e limitato, e $B \subset C$ una boundary separabile per C. Allora $C = \overline{\mathrm{conv}}\, B$ (chiusura in norma!), e C è w^*-compatto.*

- **Corollario 3 bis.** [che mi sono dimenticato di fare in aula...]
Se X è uno spazio di Banach tale che $\mathrm{ext}\, B_{X^*}$ sia separabile, allora X^* (e quindi anche X) è separabile.

- **Teorema (James 1964).** *Siano X uno spazio di Banach e $C \subset X$ un insieme chiuso, convesso e limitato. Allora le seguenti sono equivalenti:*
(i) C è w-compatto;
(ii) ogni elemento di X^* assume il suo massimo su C.
△ *Abbiamo dimostrato soltanto il caso di C separabile:* è una conseguenza immediata del teorema di Rodé (Coroll. 3).

- $\triangle$[caso separabile] **Corollario 4 (James).** *Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni elemento di X^* assume la norma.*

- **Dimostrazione del teorema sulle boundary.** Abbiamo prima dimostrato un lemma topologico. La dimostrazione del teorema usa in modo non triviale i seguenti tre teoremi: il t. di Krein–Milman, il t. di Milman (il "vice versa" del precedente) e la "versione duale" del t. di Bishop–Phelps.
Per dettagli si veda il file "Le boundary e il teorema di James" che verrà messo online a breve.

Teorema di Helly su intersezioni
(Helly's Intersection Theorem)

- **Introduzione, motivazione.**
E' elementare dimostrare che *se ogni due elementi di una famiglia finita di intervalli in $\mathbb{R}$ si intersecano allora esiste un punto contenuto in tutti i membri della famiglia.*
Dall'altra parte, semplici esempi mostrano che lo stesso non vale per famiglie di insiemi convessi in $\mathbb{R}^2$. Dimostreremo però che *se ogni tre elementi di una famiglia finita di insiemi convessi in $\mathbb{R}^2$ si intersecano allora esiste un punto contenuto in tutti i membri della famiglia.*
Quest'affermazione è un caso particolare del *teorema di Helly.*

14/04/2016 [2 ore: n. 25,26]

- Siano $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi. La famiglia $\mathcal{F}$ è detta:
  - *k-centrata* se ogni sua sottofamiglia (non vuota) di k o meno elementi ha intersezione non vuota;
  - *centrata* se è k-centrata per ogni $k \in \mathbb{N}$.

- *Ripasso topologico.*
  (a) Uno spazio topologico di Hausdorff T è compatto se e solo se ogni famiglia centrata di chiusi in T ha intersezione non vuota.
  (b) *Corollario.* Siano T uno spazio topologico di Hausdorff e $\mathcal{F}$ una famiglia centrata di chiusi in T. Se esiste una sottofamiglia finita $\emptyset \neq \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tale che $\bigcap \mathcal{F}_0$ sia compatta, allora $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

- *Osservazione.* Abbiamo visto che ogni famiglia finita e 2-centrata di convessi in $\mathbb{R}$ ha intersezione non vuota, mentre lo stesso non vale per $\mathbb{R}^2$ (basta considerare la famiglia dei tre lati di un triangolo).
  L'ultimo esempio può essere generalizzato come segue: consideriamo in $\mathbb{R}^d$ il simplesso
  $$S := \{x \in [0,1]^d : x_1 + \cdots + x_d \leq 1\}$$
  e la famiglia $\mathcal{F}$ delle $d+1$ facce di S. Allora $\mathcal{F}$ è una famiglia d-centrata di $d+1$ compatti convessi in $\mathbb{R}^d$, avente intersezione vuota.

- $\triangle$**Teorema di Helly.**
  [1913; la prima dimostrazione pubblicata nel 1921 da Radon]
  Sia $\mathcal{F}$ una famiglia $(d+1)$-centrata di convessi in $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che sia soddisfatta almeno una *delle seguenti condizioni:*
  (a) $\mathcal{F}$ è finita;
  (b) gli elementi di $\mathcal{F}$ sono chiusi e almeno uno di essi è limitato.
  Allora $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

- *Intermezzo.* La stessa dimostrazione (di Radon) può essere utilizzata per dimostrare il seguente **teorema di Radon**.
  Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di almeno $d+2$ elementi. Allora esiste una decomposizione $A = B \cup C$ (B, C disgiunti) tale che
  $$(\operatorname{conv} B) \cap (\operatorname{conv} C) \neq \emptyset.$$

- **Alcune applicazioni del teorema di Helly.**

  1. $\triangle$ *Siano X uno spazio normato d-dimensionale, $r > 0$, $A \subset X$. Se ogni $d+1$ o meno elementi di A sono contenuti in qualche bolla chiusa di raggio r, allora A è contenuto in una bolla di raggio r.*

  Corollario. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ di diametro al più 1 è sempre contenuto in un cerchio di raggio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

  2. $\triangle$ *Siano $C \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto convesso e $\mathcal{K}$ una famiglia di almeno $d+1$ convessi compatti in $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che ogni $d+1$ elementi di $\mathcal{K}$ contengano [siano contenuti in] uno stesso traslato di C. Allora tutti gli elementi di $\mathcal{K}$ contengono [sono contenuti in] uno stesso traslato di C.*

  3. $\triangle$ ("spiedino")
  Sia $\mathcal{S}$ una famiglia di almeno tre segmenti compatti nel piano, a due a due paralleli. Se ogni 3 *elementi di $\mathcal{S}$ sono intersecati da una retta, allora tutti gli elementi di $\mathcal{S}$ sono intersecati da una stessa retta.*

Ne è conseguenza il seguente teorema di "sandwich".
$\triangle$ *Per due funzioni reali $f \le g$ su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) esiste una funzione reale affine a su I tale che $f \le a \le g$;
(ii) per ogni $x < y$ in I e ogni $\alpha, \beta > 0$ con $\alpha + \beta = 1$ si ha:

$$\begin{cases} f(\alpha x + \beta y) \le \alpha g(x) + \beta g(y) \ , \\ g(\alpha x + \beta y) \ge \alpha f(x) + \beta f(y) \ . \end{cases}$$

18/04/2016 [2 ore: n. 27,28]

- [Alcune applicazioni del teorema di Helly – continua.]
  4. $\triangle$ *Sia C un insieme convesso che sia ricoperto con un numero finito di semispazi (algebricamente chiusi o aperti). Allora ne bastano $d+1$ o meno, di quei semispazi, per ricoprire C.*

Un teorema di separazione con interno relativo

- **Lemma 1.** *Siano X, Y, Z spazi vettoriali, $T\colon X \to Y$ e $F\colon X \to Z$ mappe lineari tali che $T(X) = Y$ e $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} F$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*
  (a) Esiste $G\colon Y \to Z$ lineare tale che $F = G \circ T$.
  (b) Se $F \ne 0$ allora $G \ne 0$.
  (c) Se X, Y, Z sono spazi normati, T, F sono continue e T è una mappa aperta (quest'ultima ipotesi si verifica, ad es., quando X, Y sono di Banach oppure Y è finito-dimensionale), allora anche G è continua.

- **Lemma 2.** *Siano X, Y spazi normati, $T\colon X \to Y$ un'operatore continuo, lineare e aperto, $C \subset X$ è un convesso avente punti interni. Allora* $T(\operatorname{int} C) = \operatorname{int} T(C)$.

- **Proposizione 1.** *Siano X, Y spazi vettoriali, $F\colon X \to Y$ una mappa affine, $A \subset X$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*
  (i) $F(\operatorname{aff} A) = \operatorname{aff} F(A)$.
  (ii) *Se X, Y sono normati e A è convesso e finito-dimensionale, allora*

$$F(\operatorname{ri} A) = \operatorname{ri} F(A) \, .$$

- **Proposizione 2.** *Siano X, Y spazi normati, $A \subset X$, $B \subset Y$. Allora*
$$\operatorname{aff}(A \times B) = (\operatorname{aff} A) \times (\operatorname{aff} B) \quad e \quad \operatorname{ri}(A \times B) = (\operatorname{ri} A) \times (\operatorname{ri} B).$$

- **Proposizione 3.** *Siano X uno spazio normato e $A, B \subset X$ due convessi finito-dimensionali. Allora*
$$\operatorname{aff}(A - B) = (\operatorname{aff} A) - (\operatorname{aff} B) \quad e \quad \operatorname{ri}(A - B) = (\operatorname{ri} A) - (\operatorname{ri} B).$$

- **Teorema.** *Siano X uno spazio normato e $A, B \subset X$ due convessi finito-dimensionali tali che $(\operatorname{ri} A) \cap (\operatorname{ri} B) = \emptyset$. Allora esiste $f \in X^*$ tale che*
$$f(a) < f(b) \qquad \text{per ogni } a \in \operatorname{ri} A,\ b \in \operatorname{ri} B.$$
(In particolare, $f \neq 0$, f non è costante su $A \cup B$ e vale la disuguaglianza $\sup f(A) \leq \inf f(B)$.)
Idea della dimostrazione. Sia $C := A - B$. Allora $L := \operatorname{aff} C$ è finito-dimensionale; inoltre, $0 \neq \operatorname{ri} C$. Se $0 \notin L$, esiste $f \in X^*$ con $\sup f(L) < 0$. Se invece $0 \in L$, allora L è un sottospazio di X. Usando il teorema di Hahn-Banach in L e il teorema di estensione, si ottiene $f \in X^*$ tale che $f(c) < 0$ per ogni $c \in \operatorname{ri} C$. E' facile dimostrare che tale f soddisfa la tesi.

21/04/2016 [2 ore: n. 29,30]

Alcuni esempi di funzioni convesse

In quanto segue, X è uno spazio normato.

- *Funzione indicatrice.* Dato un insieme $C \subset X$, la funzione
$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
è convessa se e solo se C è convesso, ed è l.s.c. se e solo se C è chiuso.

- *Funzioni di supporto.* Dati $\emptyset \neq A \subset X^*$ e $\emptyset \neq B \subset X$, le funzioni
$$s_A(x) = \sup x(A), \quad \sigma_B(x^*) = \sup x^*(B)$$
sono convesse; s_A è l.s.c. e σ_B è w^*-l.s.c. (e quindi anche l.s.c.).
Si noti che $s_A < +\infty$ se A è limitato, e il vice versa vale se X è di Banach. Inoltre, $\sigma_B < +\infty$ se e solo se B è limitato.

- *Funzione di distanza.* Dato un insieme $\emptyset \neq A \subset X$, la funzione
$$d_A(x) = \mathrm{dist}(x, A)$$
è 1-lipschitziana. Se A è convesso allora d_A è convessa (su tutto X). Se $C := X \setminus A$ è convesso allora d_A è concava su $\overline{C}$.

- *Funzionale di Minkowski.* Sia $C \subset X$ un insieme convesso tale che $0 \in \text{a-int}\, C$ (cioè, C è assorbente). La funzione (a valori reali)
$$\mu_C(x) = \inf\{t > 0 : x \in tC\}$$
è sublineare (cioè, positivamente omogenea e subadditiva). Inoltre, μ_C è continua se e solo se $0 \in \operatorname{int} C$ (se e solo se μ_C è lipschitziana).

- *Funzioni del tipo $f(x) = \|x\|^p$ con $p \geq 1$.* Esse sono convesse grazie al seguente piccolo lemma.

  △*Lemma.* Siano $C \subset X$ un insieme convesso, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon C \to I$ una funzione convessa e $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa non decrescente. Allora la funzione composta $\varphi \circ f$ è convessa su C. Inoltre, se f è strettamente convessa e φ è convessa e strettamente crescente, allora la composta è strettamente convessa.

- *Funzioni sublineari.* Una funzione $p\colon X \to \mathbb{R}$ è detta sublineare se $p(tx) = tp(x)$ e $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$ e $t > 0$.

  △**Proposizione.** *Sia p una funzione sublineare su X.*
  (a) $p(0) = 0$.
  (b) $-p(-x) \leq p(x)$ per ogni $x \in X$.
  (c) $V := \{v \in X : -p(-v) = p(v)\}$ è un sottospazio di X, e la restrizione $p|_V$ è lineare.
  (Si noti, inoltre, che se p è continua allora il sottospazio V è chiuso.)

Derivabilità di funzioni convesse di una variabile reale.

In quanto segue, $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa.

- La funzione
$$Q(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\,, \qquad x, y \in I,\ x \neq y,$$
è non decrescente in ciascuna delle due variabili.

- $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ esistono in ogni punto di I.

- f è lipschitziana su ogni intervallo compatto $[a,b] \subset I$. In particolare, f è continua in I.

- $\triangle$ Se $x < y$ allora $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$.

- $\triangle$ f'_+ è continua da destra, mentre f'_- è continua da sinistra.

- $\triangle$ L'insieme $N := \{x \in I : \ f \text{ non è derivabile in } x\}$ è al più numerabile.

- $\triangle$ Se f è derivabile in x, allora f'_+, f'_- sono continue in x.

- *Corollario.* Per ogni $[a,b] \subset I$,

$$f(b) - f(a) = (L)\!\int_a^b f' = (R)\!\int_a^b f'_+ = (R)\!\int_a^b f'_- \ .$$

Differenziabilità di funzioni convesse, subdifferenziale

- *Derivate direzionali.* Siano X, Y spazi normati, $A \subset X$ un insieme aperto, $F \colon A \to Y$, $a \in A$, $v \in X$.

$$\begin{aligned} F'(a,v) &:= \lim_{t \to 0} \frac{F(a+tv) - F(a)}{t} \ , \\ F'_+(a,v) &:= \lim_{t \to 0^+} \frac{F(a+tv) - F(a)}{t} \ , \\ F'_-(a,v) &:= \lim_{t \to 0^-} \frac{F(a+tv) - F(a)}{t} \ . \end{aligned}$$

- Si osservi che:
  - $F'_\pm(a,0) = 0$;
  - $F'_+(a,\lambda v) = \lambda F'_+(a,v)$ per ogni $\lambda \geq 0$;
  - $F'_-(a,v) = -F'_+(a,-v)$.

22/04/2016 [2 ore: n. 31,32]

- *I due tipi di differenziabilità.* Siano X, Y spazi normati, $A \subset X$ un insieme aperto, $F\colon A \to Y$, $a \in A$.

  F è *differenziabile secondo Gâteaux* (G-differenziabile) in a se esiste $T\colon X \to Y$ continuo lineare (detto differenziale di Gâteaux) tale

$$F'(a, v) = Tv \quad \text{per ogni } v \in X.$$

  F è *differenziabile secondo Fréchet* (F-differenziabile) in a se esiste $T\colon X \to Y$ continuo lineare (detto differenziale di Fréchet) tale

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Th}{\|h\|} = 0\,.$$

- *Osservazioni.*
  (a) Se F è F-differenziabile in a allora è anche G-differenziabile in a (con lo stesso differenziale), ma non vale il vice versa (si consideri $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + x^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$).
  (b) F è G-diff. in a con differenziale T se e solo se

$$\forall v \in X: \quad F(a + tv) = F(a) + t\,Tv + o(t),\ t \to 0.$$

  (c) F è F-diff. in a con differenziale T se e solo se

$$F(x) = F(a) + T(x - a) + o(\|x - a\|),\ x \to a.$$

  (d) Se F è F-diff. in a allora è continua in a. Se F è solo G-diff. in a, possiamo solamente concludere che la restrizione di F su ogni retta passante per a è continua in a.

- $\triangle$**Teoremino.** *Siano X, Y, A, F, a come sopra. Supponiamo che $\dim X < \infty$ e che F sia lipschitziana in un intorno di a. Allora F è F-differenziabile in a se e solo se è G-differenziabile in a.*

- **<u>In quanto segue</u>, $A \subset X$ è un aperto convesso, $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa, $a \in A$.**

- $\triangle$**Lemma.** *$f'_+(a, \cdot)$ è una funzione sublineare definita su tutto X. Inoltre, l'insieme*

$$V := \{v \in X : \text{ esiste } f'(a, v)\}$$

  è un sottospazio sul quale le funzione $f'_+(a, \cdot)$ è lineare. Se, in più, f è continua in a allora $f'(a, \cdot)$ è continua su X e il sottospazio V è chiuso.

- $\triangle$**Teorema.** *Siano X, A, f, a come sopra. Se f è continua e se esiste $E \subset X$ tale che $\overline{\operatorname{span}} E = X$ e $f'(a, v)$ esiste per ogni $v \in E$, allora f è G-differenziabile in a.*

- $\triangle$**Corollario.** *Siano X, A, f, a come sopra. Se $X = \mathbb{R}^d$ e f ammette tutte le derivate parziali in a, allora f è F-differenziabile in a.*

- **Esempio.** Siano $X = \ell_1$, $f(x) = \|x\|_1$. Allora f è G-differenziabile in x se e solo se $x(i) \neq 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. D'altra parte, f non è F-differenziabile in alcun punto di X.

28/04/2016 [2 ore: n. 33,34]

- *Introduzione al subdifferenziale: caso di $X = \mathbb{R}$.*
  Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $a \in I$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Il *subdifferenziale* di f in a è l'insieme
  $$\partial f(a) = \{m \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq f(a) + m(x - a) \ \forall x \in I\},$$
  e i suoi elementi vengono chiamati *subgradienti* (di f in a).
  Proprietà.
  (a) $\partial f(a) = [f'_-(a), f'_+(a)] \neq \emptyset$.
  (b) f è derivabile in a se e solo se $\#\partial f(a) = 1$.
  (c) Se f è derivabile in a con $f'(a) = m_0$, allora $\partial f(a) = \{m_0\}$ e la mappa subdifferenziale $\partial f \colon I \to 2^{\mathbb{R}}$ è "continua" in a, nel senso che vale l'implicazione:
  $$I \ni x_n \to a, \ m_n \in \partial f(x_n) \quad \Rightarrow \quad m_n \to m_0.$$

- **Un lemmino utile.** *Siano X uno spazio vettoriale, $\Lambda \in (X \times \mathbb{R})^\sharp \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se esistono $x \in X$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che*
  $$t_1 \neq t_2 \quad e \quad \Lambda(x, t_1) \neq \Lambda(x, t_2)$$
  (cioè, se Λ strettamente separa due punti "in posizione verticale"), allora l'iperpiano $[\Lambda = \alpha] \subset X \times \mathbb{R}$ coincide con il grafico di una funzione affine $a \colon X \to \mathbb{R}$.

- **Definizione generale di subdifferenziale.** Siano X uno s.v.t., $f \colon X \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, $a \in X$.
  Il *dominio effettivo* di f è l'insieme
  $$\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) \neq +\infty\} = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Il *subdifferenziale* di f in a è l'insieme

$$\partial f(a) = \begin{cases} \{x^* \in X^* :\ f(x) \geq f(a) + x^*(x-a)\ \forall x \in X\} & \text{se } a \in \operatorname{dom} f\,, \\ \emptyset & \text{se } a \notin \operatorname{dom} f\,. \end{cases}$$

Gli (eventuali) elementi di $\partial f(a)$ vengono chiamati *subgradienti.*

Commento. Nel caso di una funzione convessa $f\colon A \to \mathbb{R}$, dove $A \subset X$ è un aperto convesso, possiamo estendere f a tutto X ponendo $f(x) = +\infty$ per $x \notin A$, per applicare poi la definizione del subdifferenziale. In tal caso, la definizione diventa

$$\partial f(a) = \{x^* \in X^* :\ f(x) \geq f(a) + x^*(x-a)\ \forall x \in A\}$$

per ogni $a \in A$.

- **Convenzione.** In quanto segue, vengono assunte le seguenti ipotesi di base:

(IB) *X è uno spazio normato, $A \subset X$ è un insieme aperto convesso, $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa* <u>*continua*</u>*, $a \in A$.*

1. $\triangle$ $\partial f(a) \neq \emptyset$.

2. $\triangle$ *Sia $L \geq 0$. TFAE:*
(i) f è L-lipschitziana in A;
(ii) $\partial f(x) \subset LB_{X^*}$ per ogni $x \in A$;
(iii) $\partial f(x) \cap LB_{X^*} \neq \emptyset$ per ogni $x \in A$.

3. *Corollario.* La mappa subdifferenziale $\partial f\colon A \to 2^{X^*}$ è localmente limitata in A. (In particolare, $\partial f(a)$ è limitato.)

4. *$\partial f(a)$ è convesso e w^*-compatto (e quindi anche chiuso nella norma).*

5. $\triangle$ *La mappa subdifferenziale $\partial f\colon A \to 2^{X^*}$ è un* operatore monotono, *cioè,*

$$x, y \in A,\ x^* \in \partial f(x),\ y^* \in \partial f(y) \quad \Rightarrow \quad (x^* - y^*)(x-y) \geq 0\,.$$

Ciò generalizza il noto fatto che la derivata di una funzione convessa (derivabile su un intervallo aperto) è monotona non decrescente.

6. [Charatterizzazione del subdifferenziale tramite le derivate direzionali] $\triangle$ *TFAE:*
(i) $x^* \in \partial f(a)$;
(ii) $x^*(v) \leq f'_+(a,v)$ per ogni $v \in X$;
(iii) $-f'_+(a,-v) \leq x^*(v) \leq f'_+(a,v)$ per ogni $v \in X$.

7. [Calcolo delle derivate direzionali dal subdifferenziale]
Per ogni $v \in X$, $\quad f'_+(a,v) = \max v(\partial f(a))$.

Idea della dim. Il massimo esiste secondo 4. Da 6. segue la disuguaglianza "$\geq$". Rimane da dimostrare che esiste $x^* \in \partial f(a)$ tale che $x^*(v) = f'_+(a,v)$. Considerando la restrizione di f alla retta $L := a + \mathbb{R}v$, si consideri la funzione affine $\gamma\colon L \to \mathbb{R}$, data da $\gamma(a+tv) = f(a) + tf'_+(a,v)$. Il grafico M di γ passa per il punto $(a, f(a))$ e non interseca $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$. Possiamo quindi separare M e $\mathrm{epi}\, f$ con un iperpiano chiuso $H \subset X \times \mathbb{R}$, passante per $(a, f(a))$. Si deduce che H contiene M e, usando il "lemmino utile", che H è il grafico di una funzione affine continua $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$, necessariamente della forma $\alpha(x) = f(a) + x^*(x-a)$. Da cui $x^*(v) = f'_+(a,v)$.

Esercizio per voi.
(a) $f'_-(a,v) = \min v(\partial f(a))$.
(b) $f'(a,v)$ esiste se e solo se v è costante su $\partial f(a)$.

02/05/2016 [2 ore: n. 35,36]

- *Notazione.* Se f è G-differenziabile in a, cioè, esistono tutte le derivate direzionali e $f'(a,\cdot) = x^* \in X^*$, il funzionale x^* viene chiamato il *differenziale secondo Gâteaux* di f in a, e viene denotato:

$$f'(a) := x^*.$$

(Analogamente, il differenziale secondo Fréchet. Ovviamente, nel caso di F-diffrenziabilità, i due differenziali (G. e F.) coincidono.)

8. $\triangle$ [Caratterizzazione della G-differenziabilità]
Sempre sotto le nostre ipotesi base (IB):
f è G-differenziabile in a $\;\Leftrightarrow\;$ $\#\partial f(a) = 1$.
In tal caso, $\partial f(a) = \{f'(a)\}$.

- **Esercizio per voi** [utile per la seguente dimostrazione].
Sia $\{t_n\}$ una successione in uno spazio topologico di Hausdorff T. Diciamo che $s \in T$ è un *punto cluster* della successione $\{t_n\}$ se per ogni intorno V di s si ha che $t_n \in V$ per infiniti n.
  (a) Se T è uno spazio metrico (o più in generale, se il punto s ammette una base numerabile di intorni in T), allora: s è un punto cluster per $\{t_n\}$ se e solo se $\{t_n\}$ ha una sottosuccessione convergente a s.

(b) Se X è uno spazio normato, allora ogni successione limitata in X^* ammette almeno un punto w^*-cluster. [Usare il teorema di Banach-Alaoglu e il fatto che ogni insieme infinito in uno spazio compatto ammette almeno un punto di accumulazione.]

(c) Se z^* è un punto w^*-cluster di una succesisone $\{x_n^*\} \subset X^*$, allora per ogni $v \in X$ la successione $\{x_n^*(v)\} \subset \mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente a $z^*(v)$.

9. $\triangle$ *Se f è G-differenziabile in a con $\partial f(a) = \{x_0^*\}$, allora la mappa subdifferenziale $\partial f \colon A \to 2^{X^*}$ è "($\|\cdot\|$-w^*)–continua" in a, nel seguente senso:*

$$A \ni x_n \to a, \; x_n^* \in \partial f(x_n) \quad \Rightarrow \quad x_n^* \xrightarrow{w^*} x_0^*.$$

Idea della dimostrazione. Procedendo per assurdo, supponiamo che $x_n \to a$, $x_n^* \in \partial f(x_n)$, ma x_n^* non converga nella topologia w^* a x_0^*. Passando ad una sottosuccessione, se necessario, possiamo supporre che esista un w^*-aperto $W \subset X^*$ contenente x_0^*, tale che $x_n^* \notin W$ per ogni n. Siccome $\{x_n^*\}$ è limitata (v. 3.), essa ammette un punto w^*-cluster $z^* \in X^*$. Supponiamo che $\|x_n^*\| \le c$ per ogni n. Allora per ogni $y \in A$:

$$f(y) \ge f(x_n) + x_n^*(y - x_n) \ge f(x_n) + x_n^*(y - a) - c\|a - x_n\|.$$

Osserviamo l'espressione dopo la seconda disuguaglianza: $f(x_n) \to f(a)$, $c\|a - x_n\| \to 0$, e invece il secondo termine ammette una sottosuccessione tendente a $x_0^*(y-a)$. Ne segue che $f(y) \ge f(a) + x^*(y-a)$. Quindi $z^* = x_0^* \in W$. D'altra parte, $z^* \notin W$ in quanto $x_n^* \notin W$ e z^* è un punto w^*-cluster di $\{x_n^*\}$. Contraddizione!

10. $\triangle$ [Caratterizzazione della F-differenziabilità]
f è F-differenziabile in a se e solo se: $\#\partial f(a) = 1$ e la mappa ∂f è "continua" (nelle topologie della norma) nel punto a, cioè,

$$A \ni x_n \to a, \; x_n^* \in \partial f(x_n) \quad \Rightarrow \quad x_n^* \to x_0^*.$$

11. $\triangle$ Due corollari finali.

11a) **Corollario 1.** *Le seguenti sono equivalenti:*
(i) $f \in C^1(A)$ in senso di Fréchet;
(ii) $f \in C^1(A)$ in senso di Gâteaux;
(iii) f è F-differenziabile in ogni punto di A.

11b) **Corollario 2.** *Siano $X = \mathbb{R}^d$, e f una funzione convessa su A. Le seguenti sono equivalenti:*

(i) $f \in C^1(A)$;
(ii) f *ammette tutte le derivate parziali in tutti i punti di* A.

- **Esempio: il subdifferenziale della norma.** Siano X uno spazio normato, $x \in X$. Allora
$$\partial \|\cdot\|(x) = D(x) := \{x^* \in B_{X^*} : x^*(x) = \|x\|\}.$$
È facile vedere che
$$D(x) = \begin{cases} \{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = \|x\|\} & \text{se } x \neq 0 \\ B_{X^*} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Si osservi che $D(x) = D(\frac{x}{\|x\|})$, $x \neq 0$. Ne segue che il subdifferenziale della norma (cioè, la mappa multivoca $D\colon X \to 2^{X^*}$) è determinato dai suoi valori sulla sfera unitaria S_X. La sua restrizione a S_X,
$$D\colon S_X \to 2^{S_{X^*}}\,, \quad D(x) = \{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = 1\}\,,$$
viene chiamata la *mappa di dualità* dello spazio X. Dal punto di vista geometrico, per $x \in S_X$, l'insieme $D(x)$ è costituito dai funzionali normalizzati che definiscano un iperpiano di supporto a B_X in x.

Osservazioni.

(a) $\|\cdot\|$ non è mai G-differenziabile in 0 (e quindi neanche F-diff.).

(b) $\|\cdot\|$ è G-differenziabile in $X \setminus \{0\}$ se e solo se $\#D(x) = 1$ per ogni $x \in S_X$ (se e solo se ogni punto di S_X ammette un solo iperpiano di supporto a B_X).
In tal caso, la mappa (univoca!) di dualità $D\colon S_X \to S_{X^*}$ è $(\|\cdot\|\text{-}w^*)$–continua.

(c) $\|\cdot\|$ è F-differenziabile in $X \setminus \{0\}$ se e solo se $\#D(x) = 1$ $(x \in S_X)$ e la mappa di dualità $D\colon S_X \to S_{X^*}$ è continua (se e solo se ogni punto di S_X ammette un solo iperpiano di supporto a B_X e tale iperpiano dipende con continuità dal punto).

(d) Ora, il Teorema di James potrebbe essere riformulato in questo modo: *uno spazio di Banach* X *è riflessivo se e solo se* $D(S_X) = S_{X^*}$ (dove $D(S_X) := \bigcup_{x \in S_X} D(x)$).
Invece, il Teorema di Bishop-Phelps dice che, *se* X *è uno spazio di Banach, l'insieme* $D(S_X)$ *è denso in* S_{X^*}.

06/05/2016 [2 ore: n. 37,38]

Differenziabilità di funzioni convesse continue a meno di insiemi "piccoli"

- **Insiemi piccoli.**
Sia X uno spazio di Banach. Una classe di "insiemi piccoli" di X dovrebbe essere una famiglia non vuota $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X, di cui è naturale richiedere le seguenti proprietà:
(a) $A \in \mathcal{S}$, $B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{S}$ (in particolare, $\emptyset \in \mathcal{S}$);
(b) $A_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{S}$;
(c) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A + v \in \mathcal{S}$ per ogni $v \in X$;
(d) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \operatorname{int} A = \emptyset$.

Commenti.
(α) Ogni famiglia $\mathcal{S}$ che soddisfi (a),(b) è un *σ-ideale*.
(β) Se $\mathcal{S}$ contiene qualche insieme non vuoto e soddisfa le proprietà (a)–(c), allora necessariamente contiene tutti gli insiemi al più numerabili.

- **Alcune classi di "insiemi piccoli".**
  - La famiglia $\mathcal{C}$ degli insiemi *al più numerabili*.
  - In $X = \mathbb{R}^d$, la famiglia $\mathcal{N}$ degli insiemi *di misura (di Lebesgue) nulla*.
  - La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi *magri*, cioè, di I categoria di Baire.
  - La famiglia $\mathcal{L}$ degli insiemi *Lipschitz-small*, definiti come segue.
  Un insieme $L \subset X$ è un'*ipersuperficie lipschitziana* se esistono un iperpiano chiuso $H \subset X$, un vettore $\bar{v} \in X \setminus H$ e una funzione lipschitziana $\varphi \colon H \to \mathbb{R}$ tali che
  $$L = \{u + \varphi(u)\bar{v} : u \in H\}.$$
  Ora definiamo: $E \in \mathcal{L}$ se e solo se
  $E \subset \bigcup_n L_n$ dove ogni L_n è un'ipersuperficie lipschitziana.
  - La famiglia $\mathcal{DC}$ degli insiemi *DC-small*, definiti come segue.
  Un'*ipersuperficie DC* è definita come un'ipersuperficie lipschitziana con la funzione φ del tipo $\varphi = f - g$ dove f, g sono convesse lipschitziane.
  Ora definiamo: $E \in \mathcal{DC}$ se e solo se
  $$E \subset \bigcup_n L_n \text{ dove ogni } L_n \text{ è un'ipersuperficie DC.}$$
  Si noti che $\mathcal{DC} \subset \mathcal{L}$.
  - La famiglia $\mathcal{A}$ degli insiemi *angle-small*, definita come segue.
  Per $\alpha \in (0,1)$ e $x^* \in S_{X^*}$, abbiamo già considerato il cono
  $$K(x^*, \alpha) = \{x \in X : x^*(x) \geq \alpha\|x\|\},$$

di cui l'interno (non vuoto) è

$$\operatorname{int} K(x^*, \alpha) = \{x \in X : x^*(x) > \alpha\|x\|\}.$$

Un insieme $M \subset X$ chiameremo *del tipo* $\mathcal{P}_\alpha$ se

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists z \in B(x, \varepsilon) \ \exists x^* \in S_{X^*} \ : \quad M \cap [z + \operatorname{int} K(x^*, \alpha)] = \emptyset.$$

Ora, $E \in \mathcal{A}$ se e solo se

$$\forall \alpha \in (0,1) : \quad E = \bigcup_n M_n \text{ dove ogni } M_n \text{ è del tipo } \mathcal{P}_\alpha.$$

- **Relazioni tra le famiglie di "insiemi piccoli".**

  $$\mathcal{C} \subset \mathcal{DC} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{A} \subset \mathcal{M}.$$

  Inoltre, in $X = \mathbb{R}^d$, si ha $\mathcal{L} \cup \mathcal{A} \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.

- *Ripasso.* $T\colon X \to 2^{X^*}$ è un *operatore monotono* se

  $[x^* - y^*](x - y) \geq 0$ ogni volta che $x, \in X$, $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$.

  Denotiamo inoltre $D(T) := \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$.

- $\triangle$**Teorema (Zajíček, 1978).** *Siano X uno spazio di Banach separabile e $T\colon X \to 2^{X^*}$ un operatore monotono. Allora l'insieme*

  $$M(T) := \{x \in X : \operatorname{card} T(x) > 1\}$$

  è Lipschitz-small.

09/05/2016 [2 ore: n. 39,40]

- *Notazione.* Denotiamo con $N_G(f)$ e $N_F(f)$ l'insieme dei punti in cui f non è, rispettivamente, G-differenziabile e F-differenziabile.

- $\triangle$**Corollario.** *Siano A un aperto convesso in uno spazio di Banach separabile X, e f una funzione convessa continua in A. Allora*

  $$N_G(f) \in \mathcal{L}$$

  (in particolare, $N_G(f) \in \mathcal{M}$ il che è un teorema di Mazur [1933]).

- $\triangle$**Corollario.** *Siano A, f come sopra con $X = \mathbb{R}^d$. Allora*

  $$N_G(f) = N_F(f) \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}.$$

- In realtà, vale un teorema più forte del penultimo Corollario:

  Teorema (Zajíček, 1979). *Sia X uno spazio di Banach separabile.*
  (a) *Se A, f sono come sopra, allora $N_G(f) \in \mathcal{DC}$.*
  (b) *Una specie di "vice versa": se $E \in \mathcal{DC}$, allora esiste una funzione convessa continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tale che $E \subset N_G(f)$.*

  (Si noti che la parte (b) mostra che la classe $\mathcal{DC}$ in (a) non può essere sostituita da una classe più piccola!)

- **Facile esercizio.** Siano X, Y spazi metrici, $\Phi\colon X \to 2^Y$, $\Phi(x_0) \neq \emptyset$. Allora sono equivalenti:
  (i) $\Phi(x_0) = \{y_0\}$ e $[\,x_n \to x_0,\ y_n \in \Phi(x_n) \Rightarrow y_n \to y_0\,]$;
  (ii) $\Phi(x_0) = \{y_0\}$ e $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta)\colon\ T(x) \subset B(y_0, \varepsilon)$;
  (iii) $\operatorname{osc}(\Phi, x_0) = 0$, dove
  $$\operatorname{osc}(\Phi, x_0) := \inf_{\delta>0} \operatorname{diam} \Phi(B(x_0, \delta)) = \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{diam} \Phi(B(x_0, \delta))\,.$$

- **Teorema (Preiss–Zajíček, 1984)** *Siano X uno spazio di Banach con X^* separabile, $T\colon X \to 2^{X^*}$ un operatore monotono. Allora l'insieme*
  $$\Delta(T) := \{x \in D(T) :\ \operatorname{osc}(T, x) > 0\}$$
  è angle-small.

- $\triangle$**Corollario.** *Siano X uno spazio di Banach con X^* separabile, $A \subset X$ un aperto convesso, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa continua. Allora*
  $$N_F(f) \in \mathcal{A}$$
  (in particolare, $N_F(f) \in \mathcal{M}$ il che è stato dimostrato da Asplund nel 1978).

- **Alcuni fatti sugli spazi di Asplund.**

  Uno *spazio di Asplund* è uno spazio di Banach X tale che $N_F(f) \in \mathcal{M}$ per ogni funzione convessa continua f definita in un aperto convesso $A \subset X$.

  Uno *spazio weak-Asplund* è uno spazio di Banach X tale che $N_G(f) \in \mathcal{M}$ per ogni funzione convessa continua f definita in un aperto convesso $A \subset X$.

  Ovviamente, ogni spazio di Asplund è weak-Asplund.

  Sappiamo già che:
  - gli spazi di Banach separabili sono weak-Asplund;
  - gli spazi di Banach con duale separabile sono di Asplund.

Ecco alcuni ulteriori risultati.

Teorema. Per uno spazio di Banach separabile X, TFAE:
(i) X è di Asplund;
(ii) X^* è separabile;
(iii) esiste una norma equivalente su X che sia F-differenziabile in $X \setminus \{0\}$.

Teorema. Per uno spazio di Banach X (non necessariamente separabile), TFAE:
(i) X è di Asplund;
(ii) ogni sottospazio chiuso separabile di X ha duale separabile;
(iii) X^* ha la seguente *proprietà di Radon-Nikodým*: per ogni insieme limitato non vuoto $M \subset X^*$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un semispazio aperto $H \subset X^*$ tale che $M \cap H$ non è vuoto e ha diametro minore di ε;
(iv) come (iii) con H w^*-aperto.

Teorema (condizioni sufficienti).
X ha una norma equivalente F-diff. [G-diff.] su $X \setminus \{0\}$
$\Rightarrow$
esiste *una* funzione f che sia continua (non necessariamente convessa), coerciva e F-diff. [G-diff.] su X
$\Rightarrow$
X è Asplund [weak-Asplund].

12/05/2016 [2 ore: n. 41,42]

Disuguaglianza integrale di Jensen (in $\mathbb{R}^d$)
(per dettagli si veda il relativo file sulla mia pagina web)

- *Motivazione.* La disuguaglianza finita di Jensen come caso particolare di quella integrale.
- Integrazione di funzioni a valori vettoriali.
- **Il baricentro.** Siano $C \subset \mathbb{R}^d$ un insieme convesso, μ una misura di probabilità definita su una σ-algebra Σ contenente $\mathcal{B}(C)$ (la σ-algebra dei boreliani relativi di C). Il *baricentro* di μ è (se esiste) definito come il punto
$$x_\mu := \int_C x\, d\mu(x) \ (\in \mathbb{R}^d).$$
$\triangle$ Si ha che x_μ *esiste se e solo se* $\|\cdot\| \in L_1(\mu)$.

- $\triangle$**Teorema (sul baricentro).** *Siano C, μ come sopra, $\|\cdot\| \in L_1(\mu)$. Allora $x_\mu \in C$.*

- *Lemma.* Siano $C \subset \mathbb{R}^d$ un insieme convesso, $f\colon C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, $x_0 \in \operatorname{ri} C$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < f(x_0)$. Allora esiste una funzione affine $a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che $a \le f$ su C, e $t_0 < a(x_0)$.

- $\triangle$**Teorema (disug. integrale di Jensen).** *Siano C, μ, Σ come sopra, $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa Σ-misurabile. Se $\|\cdot\| \in L_1(\mu)$, allora:*
  (a) $x_\mu \in C$;
  (b) $\int_C f\,d\mu$ esiste e appartiene a $(-\infty, +\infty]$;
  (c) vale la disuguaglianza
  $$f(x_\mu) \le \int_C f\,d\mu\,.$$

- $\triangle$**Un'applicazione - la disuguaglianza di Hermite–Hadamard.** Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora
  $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

16/05/2016 [2 ore: n. 43,44]

- *Una curiosità.* Vale la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Hermite–Hadamard.

  Sia $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^d$ una bolla chiusa, considerata in una qualsiasi norma su $\mathbb{R}^d$. Siano $|B|$ la misura di Lebesgue di B, e σ la misura superficiale su ∂B (è noto, che la misura di superficie è ben definita non solo per superfici di classe C^1 ma anche per quelle localmente lipschitziane). Allora, per ogni funzione convessa continua $f\colon B \to \mathbb{R}$, si ha
  $$f(x_0) \le \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx \le \frac{1}{\sigma(\partial B)}\int_{\partial B} f\,d\sigma\,.$$

- $\triangle$**Un'altra applicazione – convessità per serie.** Siano $C \subset \mathbb{R}^d$ un insieme convesso, $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, $\{x_n\} \subset C$, $\{\lambda_n\} \subset [0, +\infty)$. Se $\sum_1^{+\infty} \lambda_n = 1$ e $\sum_1^{+\infty} \lambda_n \|x_n\| < +\infty$, allora:
  (a) $\bar{x} := \sum_1^{+\infty} \lambda_n x_n \in C$;
  (b) la serie $\sum_1^{+\infty} \lambda_n f(x_n)$ ammette somma (in $(-\infty, +\infty]$);

(c) $f(\bar{x}) \leq \sum_1^{+\infty} \lambda_n f(x_n)$.

- **Il *push forward* (immagine) di una misura.**
Siano $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, (C, Σ) uno spazio misurabile, $g\colon \Omega \to C$ una funzione $(\mathcal{A}$-$\Sigma)$–misurabile. Allora la formula
$$\nu(E) := \mu(g^{-1}(E)) \,, \quad E \in \Sigma,$$
definisce una misura ν su C tale che $\nu(C) = \mu(\Omega)$. Vale, inoltre la seguente *regola di integrazione*:
Per ogni funzione Σ-misurabile $f\colon C \to \overline{\mathbb{R}}$:
(a) $\int_C f\, d\nu$ esiste se e solo se esiste $\int_\Omega (f \circ g)\, d\mu$;
(b) in tal caso, i due integrali coincidono;
(c) $f \in L_1(\nu)$ se e solo se $f \circ g \in L_1(\mu)$.

- $\triangle$**Teorema (Jensen II).** *Siano $C \subset \mathbb{R}^d$ un insieme convesso, Σ una σ-algebra su C contenente $\mathcal{B}(C)$, $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa Σ-misurabile. Allora, per ogni spazio di misura finita non banale $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e ogni funzione $(\mathcal{A}$-$\Sigma)$–misurabile $g\colon \Omega \to C$ tale che $g \in L_1(\mu)$, si ha*
$$f\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega g\, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (f \circ g)\, d\mu \,.$$
(In particolare, tutti gli "ingredienti" della disuguaglianza esistono!)

- **Esempi.** Siccome ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è un insieme boreliano e ogni funzione convessa $f\colon I \to \mathbb{R}$ è boreliana, possiamo applicare la seconda disuguaglianza di Jensen a funzioni $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ a valori in I. Otteniamo così le seguenti disuguaglianze.
(i) Per $I = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^p$ con $p \geq 1$:
$$\left| \int_\Omega g\, d\mu \right| \leq \|g\|_p \cdot \mu(\Omega)^{1/q} \qquad (\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1).$$
(Si noti che è un caso particolare della disuguaglianza di Hölder.)
(ii) Per $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = e^x$:
$$e^{\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega g\, d\mu} \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega e^g\, d\mu \,.$$
(iii) Per $I = (0, +\infty)$ e $f(x) = \log x$ (funzione concava!):
$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \log g\, d\mu \leq \log\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega g\, d\mu\right) .$$

Minimax

- **Teorema (Mazur-Orlicz).** *Siano X uno spazio vettoriale, $p\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione sublineare, $C \subset X$ un insieme convesso non vuoto. Allora esiste $\ell \in X^\sharp$ tale che*
$$\ell \leq p \qquad e \qquad \inf \ell(C) = \inf p(C)\,.$$
Se, inoltre, X è uno s.v.t. e p è continua, allora $\ell \in X^*$.
Idea. Se $\alpha := \inf p(C) = -\infty$, allora basta applicare il teorema di Hahn-Banach classico. Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$. Separare $\operatorname{epi} p$ e $C \times (-\infty, \alpha)$ con un iperpiano $H \subset X \times \mathbb{R}$. H è il grafico di una funzione affine a su X. Dimostrare che $a(0) = 0$, cioè, a è lineare; porre $\ell = a$.

- **Punti di sella.** Siano C, D due insiemi, $h = h(x,y)\colon C \times D \to \mathbb{R}$. Un punto $(x_0, y_0) \in C \times D$ è un *punto di sella* per h se
$$h(x_0, y) \leq h(x_0, y_0) \leq h(x, y_0) \quad \text{per ogni } x \in C,\ y \in D.$$

- $\triangle$ La seguente disuguaglianza **vale sempre**:
$$\sup_x \inf_y h(x,y) \leq \inf_y \sup_x h(x,y).$$

- **Lemma.** *TFAE:*
 (i) esiste un punto di sella;
 (ii) $\max\limits_y \inf\limits_x h(x,y) = \min\limits_x \sup\limits_y h(x,y)$ *(sottintendendo che il* max *e il* min *esistono).*

Dimostrazione.
Se vale (i), abbiamo
$$\begin{aligned}\inf_x \sup_y h(x,y) &\leq \max_y h(x_0,y) = h(x_0,y_0) \\ &= \min_x h(x,y_0) \leq \sup_y \inf_x h(x,y).\end{aligned}$$
Dalla disuguaglianza del punto precedente segue che tutte le disuguaglianze sono uguaglianze e che gli inf e sup esterni sono, in realtà, min e max.
Vice versa, se vale (ii) allora esistono $x_0 \in C$ e $y_0 \in D$ tali che
$$\min_x \sup_y h(x,y) = \sup_y h(x_0,y)\,, \qquad \max_y \inf_x h(x,y) = \inf_x h(x,y_0).$$
Allora $h(x_0,y_0) \leq \sup\limits_y h(x_0,y) = \min\limits_x \sup\limits_y h(x,y) = \max\limits_y \inf\limits_x h(x,y) = \inf\limits_x h(x,y_0) \leq h(x_0,y_0)$, da cui segue che (x_0,y_0) è un punto di sella.

19/05/2016 [2 ore: n. 45,46]

- *Osservazione.*
  (a) $\triangle$ Se C è compatto (in qualche topologia) e $h = h(x,y)$ è l.s.c. in x, allora esistono
  $$\min_x h(x,y) \quad (y \in D) \qquad \text{e} \qquad \min_x \sup_y h(x,y).$$
  Analogamente, se D è compatto e h è u.s.c. in y, allora esistono
  $$\max_y h(x,y) \quad (x \in C) \qquad \text{e} \qquad \max_y \inf_x h(x,y).$$
  (b) Se C, D sono entrambi compatti e h è l.s.c. in x e u.s.c. in y (nelle rispettive topologie), allora esistono
  $$\max_y \min_x h(x,h) \qquad \text{e} \qquad \min_x \max_y h(x,y)$$
  ma possono essere diversi: ad esempio, $C = D = \{0,1\}$, $h(x,y) := \delta_{xy}$ (delta di Kronecker).

- $\triangle$**Lemma.** *Sia C un insieme convesso non vuoto in uno spazio vettoriale, $f_1, \dots, f_n \colon C \to \mathbb{R}$ funzioni convesse su C. Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ con $\sum_1^n \lambda_i = 1$ tali che*
  $$\inf_C \big[\max\{f_1, \dots, f_n\}\big] = \inf_C \left[\sum_1^n \lambda_i f_i\right].$$
  Dimostrazione. Applicando il Teorema di Mazur-Orlicz alla funzione sublineare
  $$p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad p(t) := \max\{t_1, \dots, t_n\},$$
  e all'insieme convesso
  $$D := \big\{t \in \mathbb{R}^n : \ \exists x \in C \ \forall i \ f_i(x) \leq t_i\big\},$$
  otteniamo $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$ tale che $\ell \leq p$ e $\inf_D \ell = \inf_D p$. Quindi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\ell(t) = \sum_1^n \lambda_i t_i$.
  Affermiamo che $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_1^n \lambda_i = 1$. Infatti:
  ◦) ad es., $-\lambda_1 = \ell(-1, 0, \dots, 0) \leq p(-1, 0, \dots, 0) = 0$;
  ◦) $-\sum_1^n \lambda_i = \ell(-1, \dots, -1) \leq p(-1, \dots, -1) = -1$;
  ◦) $\sum_1^n \lambda_i = \ell(1, \dots, 1) \leq p(1, \dots, 1) = 1$.
  Ora basta osservare che
  $$\inf_D \ell = \inf_C \left[\sum_1^n \lambda_i f_i\right], \quad \inf_D p = \inf_C \big[\max\{f_1, \dots, f_n\}\big].$$

- *Definizione.* Diciamo che una funzione $h = h(x,y)$ è *convessa-concava* se:
  - $h(\cdot, y)$ è convessa per ogni y fissato;
  - $h(x, \cdot)$ è concava per ogni x fissato.

- $\triangle$**Teorema 1.** *Siano X, Y s.v., $C \subset X$ e $D \subset Y$ insiemi convessi, $h = h(x,y) \colon C \times D \to \mathbb{R}$ una funzione convessa-concava. Supponiamo che esista una topologia τ su C tale che C sia τ-compatto e h sia τ-l.s.c. nella variabile x. Allora*
$$\sup_y \min_x h(x,y) = \min_x \sup_y h(x,y).$$
(Ovviamente, un teorema analogo si ottiene supponendo che, in qualche topologia, D sia compatto e h sia u.s.c. nella variabile y.)
Dimostrazione. Sappiamo già che
$$\alpha := \sup_y \min_x h(x,y) \le \min_x \sup_y h(x,y).$$
(a) Fissiamo qualsiasi $y_1, \dots, y_n \in D$. Applicando il Lemma alle funzioni convesse $f_i := h(\cdot, y_i)$, otteniamo coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di una combinazione convessa, tali che
$$\begin{aligned} \min_x \big[\max_i h(x, y_i)\big] &= \min_x \left[\sum_1^n \lambda_i h(x, y_i)\right] \\ &\le \min_x h\left(x, \sum_1^n \lambda_i y_i\right) \le \alpha. \end{aligned}$$
Abbiamo dimostrato che $\bigcap_{i=1}^n \big[h(\cdot, y_i) \le \alpha\big] \ne \emptyset$.
(b) Ora, le ipotesi su τ implicano che
$$\bigcap_{y \in D} \big[h(\cdot, y) \le \alpha\big] \ne \emptyset.$$
Ciò significa che esiste $x_0 \in C$ tale che $\sup_y h(x_0, y) \le \alpha$, e quindi
$$\min_x \sup_y h(x,y) \le \alpha.$$

- $\triangle$**Teorema 2.** *Siano, come sopra, $C \subset X$ e $D \subset Y$ insiemi convessi e h una funzione covessa-concava su $C \times D$. Supponiamo che esistano topologie τ e σ rispettivamente su C e D, nelle quali C, D siano compatti e h sia l.s.c. nella variabile x e u.s.c. nella variabile y. Allora esiste un punto di sella $(x_0, y_0) \in C \times D$ per h. In particolare,*
$$\max_y \min_x h(x,y) = h(x_0, y_0) = \min_x \max_y h(x,y)\,.$$

Dimostrazione. Tutto segue dal Teorema 1, dall'Osservazione e dall'ultimo lemma della lezione scorsa.

- $\triangle$**Corollario.** *Siano X, Y spazi normati, $C \subset X$ e $D \subset Y$ insiemi convessi, chiusi e limitati, e h una funzione convessa-concava continua su $C \times D$. Supponiamo che valga almeno una delle seguenti due condizioni.*
  (a) C, D sono debolmente compatti.
  (b) X, Y sono spazi di Banach riflessivi.
  Allora h ammette un punto di sella.

  Dimostrazione. Per (a), basta ricordare il fatto che una funzione convessa continua è anche debolmente l.s.c. Inoltre, (b) segue da (a).

Un'appendice "culturale" al corso:
due teoremi importanti su mappe multivoche
(non richiesto per l'esame)

- *Definizione.* Siano X, Y spazi topologici, $F : X \to 2^Y$, $x_0 \in X$. Diciamo che:
  - F *è u.s.c.* (semicontinua superiormente) *in* x_0 se per ogni aperto $V \subset Y$ con $F(x_0) \subset V$ esiste un intorno U di x_0 tale che
  $$F(x) \subset V \quad \text{per ogni } x \in U;$$
  - F *è l.s.c.* (semicontinua inferiormente) *in* x_0 se per ogni aperto $V \subset Y$ con $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ esiste un intorno U di x_0 tale che
  $$F(x) \cap V \neq \emptyset \quad \text{per ogni } x \in U.$$

- *Osservazioni.*
  (i) Se F è univoca in un intorno W di x_0 (cioè, $\#F(x) = 1$ per ogni $x \in W$), allora:
  $$F \text{ è u.s.c. in } x_0 \;\Leftrightarrow\; F \text{ è l.s.c. in } x_0 \;\Leftrightarrow\; F|_W \text{ è cont. in } x_0.$$
  (ii) F è u.s.c. su tutto X se e solo se per ogni aperto $V \subset X$ l'insieme $F_{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \subset V\}$ è aperto.
  (iii) F è l.s.c. su tutto X se e solo se per ogni aperto $V \subset X$ l'insieme $F^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$ è aperto.
  (iv) Se F è u.s.c. e l.s.c. in x_0, si dice che F è *(topologicamente) continua in x_0.*

- **Teorema (punto fisso per mappe multivoche).** *Siano X uno s.v.t. localmente convesso di Hausdorff, $K \subset X$ un insieme convesso compatto (non vuoto), $F\colon K \to 2^K$ una mappa u.s.c. su K, a valori non vuoti, convessi e chiusi. Allora F ammete un punto fisso, cioè, esiste $x_0 \in K$ tale che $x_0 \in F(x_0)$.*

- *Commenti sul teorema.*
  - La versione per mappe univoche è stata dimostrata da *Tikhonov* (per spazi normati da *Schauder*), ed è una generalizzazione del famoso teorema di *Brouwer* (caso $X = \mathbb{R}^d$).
  - La versione multivoca è stata dimostrata da *Kakutani* per $X = \mathbb{R}^d$. Il caso generale è dovuto a *Fan* e *Gliksberg* (1952, indipendentemente).

- **Teorema (selezione continua, Michael).** *Sia T uno spazio topologico di Hausdorff che sia compatto oppure metrizzabile (o, più in generale, "paracompatto"). Siano X uno spazio di Banach, $F\colon T \to 2^X$ una mappa l.s.c. su T, a valori non vuoti, convessi e chiusi. Allora F ammette una selezione continua, cioè, esiste una funzione (univoca) continua $f\colon T \to X$ tale che $f(t) \in F(t)$ per ogni $t \in T$.*

- **Corollario.** Siano T, X come sopra, $T_0 \subset T$ un sottoinsieme chiuso, $C \subset X$ un insieme convesso chiuso. Allora ogni funzione continua $g\colon T_0 \to C$ ammette un'estensione continua $\widetilde{g}\colon T \to C$.

  Dim. La mappa
  $$F(t) = \begin{cases} \{g(t)\} & \text{se } t \in T_0, \\ C & \text{se } t \in T \setminus T_0, \end{cases}$$
  è l.s.c. Applicare il teorema di Michael.