Rappresentazioni integrali (L.V.)

Il presente capitolo è dedicato a una descrizione del duale di $C(K)$ e alla rappresentazione dei punti di insiemi convessi compatti tramite punti estremi.

1. Misure (non negative) di Radon

Siano K uno spazio topologico compatto e $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei suoi sottoinsiemi boreliani (ciè, la più piccola σ-algebra contenente tutti gli aperti). Una misura (non negativa) μ si dice *misura di Radon* su K se

a) μ è boreliana (cioè, definita su $\mathcal{B}$),
b) μ è finita (cioè, $\mu(K) < +\infty$),
c) μ è regolare, cioè, per ogni $B \in \mathcal{B}$
$\mu(B) = \sup\{\mu(C) : \ C \subset B, \ C \text{ compatto}\}$ e
$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : \ A \supset B, \ A \text{ aperto}\}$.

Denotiamo

$$\mathcal{M}^1(K) = \{\mu : \ \mu \text{ è una misura di Radon su } K \text{ con } \mu(K) = 1\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{M}^1(K)$ vengono chiamati *misure probabilistiche di Radon*.

2. Misure con segno

Misura con segno su K è una funzione $\mu \colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e μ sia σ-additiva.

Per ogni misura con segno μ, è possibile definire due funzioni non negative μ^+, μ^- su $\mathcal{B}$ con le formule

$$\mu^+(B) = \sup\{\mu(E) : \ E \subset B, \ E \in \mathcal{B}\},$$
$$\mu^-(B) = \sup\{-\mu(E) : \ E \subset B, \ E \in \mathcal{B}\} \quad (B \in \mathcal{B}).$$

Allora μ^+ e μ^- sono due misure boreliane su K tali che $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La misura

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-$$

viene chiamata *variazione totale* della misura con segno μ. (Ovviamente, se $\mu \geq 0$, allora $\mu = \mu^+ = |\mu|$.)

È possibile dimostrare che, per ogni $B \in \mathcal{B}$,

$$|\mu|(B) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)| : B = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \ E_k \in \mathcal{B}, \ E_i \cap E_j \neq \emptyset \text{ per } i \neq j\Big\}.$$

(Quest'ultima formula può essere utilizzata per definire la variazione totale di una misura a valori complessi.)

Chiamiamo *misura di Radon con segno* una misura con segno μ tale che μ^+ e μ^- sono misure di Radon. (*Misura di Radon a valori complessi* è una misura complessa μ tale che $\mathrm{Re}(\mu)$ e $\mathrm{Im}(\mu)$ sono misure di Radon con segno.)

Lemma 2.1. *Sia $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ (o $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$) una misura. Allora sono equivalenti:*

(i) *μ è una misura di Radon con segno (o complessa);*
(ii) *$|\mu|$ è una misura di Radon;*
(iii) *$|\mu|(B) = \sup\{|\mu|(C) : \ C \subset B,\ C$ compatto$\}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.*

Denotiamo

$$\mathcal{M}(K) := \{\mu : \ \mu \text{ è una misura di Radon con segno su } K\}.$$

Allora $\mathcal{M}(K)$ è uno spazio vettoriale e, con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(K),$$

$\mathcal{M}(K)$ è uno spazio di Banach. (Lo stesso vale anche nel caso complesso.)

3. Il duale di $C(K)$

Theorem 3.1 (Riesz)**.** *Siano K uno spazio compatto (di Hausdorff) e $C(K)$ lo spazio delle funzioni continue (reali o complesse) su K con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Allora*

- *la relazione*

$$x^*(u) = \int_K u \, d\mu \quad \text{per ogni } u \in C(K)$$

  definisce una corrispondenza biunivoca fra i funzionali $x^* \in C(K)^*$ e le misure $\mu \in \mathcal{M}(K)$;
- *questa corrispondenza è una isometria (cioè, $\|x^*\|_{X^*} = \|\mu\|_{\mathcal{M}(K)}$ se μ è la misura associata a x^*);*
- *(nel caso reale) se μ è la misura associata a x^*, allora: $\mu \geq 0$ se e solo se il funzionale x^* è non negativo nel senso che $x^*(u) \geq 0$ per ogni $u \in C(K)$ con $u \geq 0$.*

4. Forma integrale del teorema di Krein–Milman

Come motivazione, esaminiamo prima il caso finito dimensionale. Ricordiamo il teorema di Minkowski–Carathéodory.

Theorem 4.1. *Sia K un insieme convesso compatto con $d := \dim K < \infty$. Allora $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}\, K)$.*

Dal teorema segue che ogni punto $x \in K$ può essere scritto come una combinazione convessa di $d+1$ punti estremi di K:

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i v_i \qquad \Big(\lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ v_i \in \operatorname{ext} K\Big).$$

Consideriamo la misura

$$\mu = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \delta_{v_i}$$

dove δ_{v_i} denota la misura di Dirac nel punto v_i. Allora $\mu(K) = \mu(\operatorname{ext} K) = \mu\big(\{v_1, \ldots, v_{d+1}\}\big) = 1$ e μ è una misura probabilistica di Radon su K, concentrata su $\operatorname{ext} K$. Inoltre

$$\int_K v\, d\mu(v) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \int_K v\, d\delta_{v_i}(v) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i v_i = x.$$

Possiamo concludere che, se $\dim K < \infty$, per ogni punto $x \in K$ esiste una misura $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ concentrata su $\operatorname{ext} K$ tale che $x = \int_K v\, d\mu(v)$ (diremo che x è il baricentro di μ).

È naturale chiedersi se sia possibile dedurre dal teorema di Krein–Milman (al posto del teorema di Minkowski–Carathéodory) qualcosa di simile anche nel caso ∞-dimensionale. La risposta è **sì**, ma con una misura concentrata sulla *chiusura* di $\operatorname{ext} K$.

Iniziamo con due semplici osservazioni.

Observation 4.2. *Siano (X, τ) uno spazio vettoriale topologico, $K \subset X$ un compatto. Allora la topologia τ e la topologia debole w di X coincidono su K.* (Infatti, è noto che sempre $w \subseteq \tau$. Perciò l'identità $I\colon (K, \tau) \to (K, w)$ è una mappa continua iniettiva fra due spazi compatti. Allora anche I^{-1} è continua (*perché?*); in altre parole, I è un omeomorfismo.*)*

Observation 4.3. *Siccome $\mathcal{M}^1(K) \subset \mathcal{M}(K) \cong C(K)^*$, ha senso parlare della topologia w^* su $\mathcal{M}(K)$. Dalla forma della relazione fra $\mathcal{M}(K)$ e $C(K)^*$ (Teorema di Riesz) segue immediatamente che $\mathcal{M}^1(K)$ è un sottoinsieme w^*-chiuso (e quindi w^*-compatto) in $\mathcal{M}(K)$.*

Definition 4.4. Sia K un insieme convesso compatto in uno spazio t. v. localmente convesso. Diciamo che $x \in K$ è *baricentro* di una misura $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ se

$$x = \int_K v\, d\mu(v)$$

nel senso dell'integrale di Pettis, cioè

$$u^*(x) = \int_K u^*(v)\, d\mu(v)\ \Big(= \int_K u^*\, d\mu\Big) \quad \forall\, u^* \in X^*.$$

Si osservi che una misura μ non può avere più di un baricentro, in quanto gli elementi di X^* separano i punti di X.

Dimostriamo ora il seguente teorema sull'esistenza dei baricentri. Per la definizione e proprietà di base delle nets (successioni generalizzate) in spazi topologici, si veda il capitoletto "*Successioni generalizzate (nets)*".

Theorem 4.5. *Siano X uno spazio v. t. localmente convesso, $K \subset X$ un insieme convesso compatto ($\neq \emptyset$). Allora ogni $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ ammette un (unico) baricentro $x_\mu \in K$. Inoltre, la mappa $\mu \mapsto x_\mu$ è continua nella topologia w^* su $\mathcal{M}^1(K)$.*

Proof. Per ogni $f \in X^*$ denotiamo $\mu(f) := \int_K f\, d\mu$.

Esistenza. Vogliamo dimostrare che esiste un punto $x_\mu \in K$ tale che $f(x_\mu) = \mu(f)$ per ogni $f \in X^*$, vale a dire che

$$\bigcap_{f \in X^*} H_f \cap K \neq \emptyset \qquad \text{dove } H_f = f^{-1}\big(\mu(f)\big).$$

Essendo gli iperpiani H_f chiusi e l'insieme K compatto, è sufficiente dimostrare la proprietà delle intersezioni finite.

Siano $f_1, \dots, f_m \in X^*$. Definiamo $T\colon X \to \mathbb{R}^m$ con

$$Tx = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big).$$

L'applicazione T è lineare continua e l'insieme $T(K)$ è convesso compatto (in $\mathbb{R}^m$). Poniamo $p := \big(\mu(f_1), \dots, \mu(f_m)\big) \in \mathbb{R}^m$.

Claim: $p \in T(K)$.

Infatti, se fosse $p \notin T(K)$, esisterebbe (secondo Hahn–Banach) un $a \in \mathbb{R}^m$ ($\cong (\mathbb{R}^m)^*$) tale che $\langle p, a\rangle > \sup\big\langle T(K), a\big\rangle$. Ponendo $g := \sum_{i=1}^m a_i f_i$, si avrebbe (tenendo conto di $\mu(K) = 1$)

$$\begin{aligned}\sup g(K) &= \int_K \sup g(K)\, d\mu \geq \int_K g\, d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(f_i) \\ &= \langle p, a\rangle > \sup\big\langle T(K), a\big\rangle = \sup_{x \in K} \sum_{i=1}^m a_i f_i(x) = \sup g(K),\end{aligned}$$

una contraddizione.

Il nostro Claim implica che esiste $z \in K$ tale che $Tz = p$, in altre parole, $z \in \bigcap_{i=1}^m H_{f_i} \cap K$.

Continuità. Sia $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^1(K)$ una net tale che $\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$ in $\mathcal{M}^1(K)$. Per ogni $f \in X^*$,

$$f(x_{\mu_\alpha}) = \mu_\alpha(f) \to \mu(f) = f(x_\mu),$$

cioè, $x_{\mu_\alpha} \xrightarrow{w} x_\mu$. Secondo Osservazione 4.2, $x_{\mu_\alpha} \to x_\mu$ nella topologia di X. $\square$

Ora siamo pronti per dimostrare il teorema della rappresentazione integrale.

Theorem 4.6 (forma integrale del teorema di Krein–Milman)**.** *Siano X uno spazio v. t. localmente convesso, $K \subset X$ un insieme convesso compatto, $x \in K$. Allora esiste una misura $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ concentrata su $\overline{\text{ext}\, K}$, il cui baricentro è x, cioè*

$$x = \int_K v \, d\mu(v).$$

Proof. Poniamo $E = \overline{\text{ext}\, K}$ (ovviamente, E è compatto). Secondo il teorema di Krein–Milman, esiste una net $\{x_\alpha\} \subset \text{conv}(\text{ext}\, K)$ tale che $x_\alpha \to x$. Per ogni α (come abbiamo già visto nel testo che segue Teorema 4.1)

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{m_\alpha} \lambda_i^\alpha v_i^\alpha \quad \text{con } \lambda_i^\alpha \geq 0, \ \sum_i \lambda_i^\alpha = 1, \ v_i^\alpha \in \text{ext}\, K\,;$$

perciò, ponendo $\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{m_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{v_i^\alpha}$,

$$x_\alpha = \int_K v \, d\mu_\alpha(v) \quad \text{e} \quad \mu_\alpha \in \mathcal{M}^1(E).$$

Per la w^*-compattezza di $\mathcal{M}^1(E)$, esiste una subnet $\{\mu_\beta\}$ della $\{\mu_\alpha\}$ tale che $\mu_\beta \xrightarrow{w^*} \mu$ per un'opportuna misura $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$. Secondo Teorema 4.5, $x_\beta \to x_\mu := \int_K v \, d\mu$ (possiamo, ovviamente, vedere μ anche come un elemento di $\mathcal{M}^1(K)$ concentrato su E, definendola nulla fuori di E [*formulate precisamente!*]). Allo stesso tempo, $x_\beta \to x$ (per la scelta di $\{x_\alpha\}$), per cui $x = x_\mu$. $\square$

La tesi del Teorema 4.6 può essere scritta equivalentemente come segue:

$$\exists\, \mu \in \mathcal{M}^1\left(\overline{\text{ext}\, K}\right) : \quad x = \int_{\overline{\text{ext}\, K}} v \, d\mu(v).$$

La misura μ rappresentante x non è necessariamente unica: si consideri come K, per esempio, un cerchio chiuso nel piano. Allora ext K coincide con il bordo del cerchio ed esistono infinite diverse rappresentazioni di un punto interno x del cerchio come combinazione convessa di punti sul bordo.

Esercizio. Dedurre il teorema di Krein–Milman da Teorema 4.6.

5. Un'applicazione della forma integrale del teorema di Krein–Milman

Alcuni risultati classici possono essere ridimostrati usando la forma integrale del teorema di Krein–Milman (Teorema 4.6). Queste applicazioni possono essere trovate in [G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier **5**(1955), 131–295] oppure in [G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Vol.II, 1969]. Noi accenniamo soltanto ad una di tali applicazioni.

Definition 5.1. Una funzione $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ si dice *completamente monotona* se f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e le sue derivate soddisfano

$$(-1)^n f^{(n)} \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R} \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Esempi di funzioni completamente monotone: $x^{-\alpha}$ e $e^{-\alpha x}$ con $\alpha \geq 0$.

Theorem 5.2 (Bernstein)**.** *Sia f una funzione limitata e completamente monotona su $(0,+\infty)$. Allora esiste una misura boreliana non negativa μ su $[0,+\infty]$ tale che $\mu\big([0,+\infty]\big) = f(0+)$ (il limite destro di f in 0) e*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, d\mu(\alpha) \qquad \textit{per ogni } x > 0.$$

Idea della dimostrazione. Si definisca

$$K = \big\{ f : f \text{ limitata e completamente monotona su } (0,+\infty) \text{ e } f(0+) \leq 1 \big\}.$$

Allora K è un compatto convesso nello spazio $X = \mathcal{C}^\infty(0,+\infty)$ con la topologia (localmente convessa) della convergenza uniforme delle funzioni e le loro derivate sui compatti: questa topologia è data dalla seguente famiglia di seminorme

$$p_{L,n}(f) = \max_{x\in L} \big| f^{(n)}(x) \big| \qquad \big(n \geq 0,\ L \subset (0,+\infty) \text{ compatto} \big).$$

Si dimostra che $\operatorname{ext} K = \{\varphi_\alpha : \ \varphi_\alpha(x) = e^{-\alpha x},\ 0 \leq \alpha \leq +\infty\}$. Siccome $\operatorname{ext} K$ è chiuso, per ogni $f \in K$ esiste una misura $\tilde{\mu}$ concentrata su $\operatorname{ext} K$ che rappresenta f. Da qui si trova facilmente la misura μ su $[0,+\infty]$. □

N.B.: Si può dimostrare che la misura μ del teorema di Bernstein è unica.

6. Rappresentazione con misure concentrate su $\operatorname{ext} K$

È ovvio che Teorema 4.6 produca una misura concentrata su $\operatorname{ext} K$ nel caso quest'ultimo insieme sia chiuso. Ma se $\dim K > 2$, l'insieme $\operatorname{ext} K$ può non essere chiuso. Nonostante ciò, se K ha dimensione finita, il teorema di Minkowski–Carathéodory (Theorem 4.1) implica la possibilità di una rappresentazione dei punti di K tramite una misura concentrata su $\operatorname{ext} K$ (senza la chiusura!).

È naturale chiedersi se tale rappresentazione sia sempre possibile. Uno dei punti problematici è il fatto che $\operatorname{ext} K$ può non essere boreliano; in tal caso una misura boreliana su K non può essere concentrata su $\operatorname{ext} K$ ($\mu(\operatorname{ext} K)$ non è definito!). Questo problema non c'è per gli insiemi K metrizzabili perché, in tal caso, $\operatorname{ext} K$ è sempre G_δ e quindi boreliano.

Enunciamo ora senza dimostrazione il famoso teorema di Choquet.

Theorem 6.1 (Choquet, 1956)**.** *Siano X uno spazio v. t. localmente convesso, $K \subset X$ un insieme convesso compatto. Se K è metrizzabile, allora ogni elemento $x \in K$ è baricentro di una misura $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ concentrata su $\operatorname{ext} K$.*

Corollary 6.2. *Sia K un sottoinsieme convesso compatto metrizzabile in uno s. v. t. localmente convesso. Se $\operatorname{ext} K$ è numerabile, allora ogni punto di K è una "combinazione convessa infinita" dei punti estremi di K.*
(Infatti, ogni misura probabilistica boreliana su $\operatorname{ext} K = \{v_n\}_1^\infty$ è necessariamente della forma $\mu = \sum_1^\infty \lambda_n \delta_{v_n}$, dove $\lambda_k \geq 0$ per ogni k e $\sum_1^\infty \lambda_n = 1$.)

Come applicazione del teorema di Choquet dimostriamo il seguente risultato secondo cui è sufficiente "testare" la convergenza debole di successioni limitate in uno spazio normato soltanto con i funzionali che sono punti estremi della bolla duale.

Theorem 6.3 (Rainwater, 1963)**.** *Siano X uno spazio normato, x, x_n ($n \in \mathbb{N}$) elementi di X. Allora sono equivalenti:*

(i) $x_n \xrightarrow{w} x$;
(ii) *la successione $\{x_n\}$ è limitata e $v^*(x_n) \to v^*(x)$ $\forall\, v^* \in \operatorname{ext} B_{X^*}$.*

Proof. L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ è ovvia (si ricordi che ogni successione debolmente convergente è limitata secondo il teorema di Banach–Steinhaus).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supponiamo (ii). Lo spazio $Y := \operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è separabile, per cui l'insieme convesso w^*_Y-compatto B_{Y^*} è metrizzabile (nella topologia debole* w^*_Y su Y^*). Sia x^* un arbitrario elemento di B_{X^*}. Allora $x^*_0 := x^*{}_{|Y} \in B_{Y^*}$. Secondo il teorema di Choquet, x^*_0 è il baricentro di un'opportuna misura $\mu \in \mathcal{M}^1(B_{Y^*})$ concentrata su $\operatorname{ext} B_{Y^*}$:

$$x^*_0 = \int_K y^*\, d\mu(y^*) = \int_{\operatorname{ext} B_{Y^*}} y^*\, d\mu(y^*).$$

Claim: ogni $y^* \in \operatorname{ext} B_{Y^*}$ ammette una estensione $u^* \in \operatorname{ext} B_{X^*}$.
(Infatti, l'insieme $K = \big\{x^* \in X^* : x^*{}_{|Y} = y^*,\ \|x^*\| = 1\big\}$ è non vuoto (teorema di Hahn–Banach) convesso w^*-compatto; secondo il teorema di Krein–Milman esiste $u^* \in \operatorname{ext} K$. È facile verificare che $u^* \in \operatorname{ext} B_{X^*}$ [*fatelo!*].)

Il nostro Claim implica che $y^*(x_n) \to y^*(x)$ $\forall\, y^* \in \operatorname{ext} B_{Y^*}$. Ciò significa che le funzioni $\langle x_n, \cdot\rangle$ convergono puntualmente sull'insieme $E := \operatorname{ext} B_{Y^*}$ alla funzione $\langle x, \cdot\rangle$. Essendo esse equilimitate, si ottiene dal teorema della convergenza dominata che

$$x^*(x_n) = x^*_0(x_n) = \int_E \langle x_n, y^*\rangle\, d\mu(y^*) \longrightarrow \int_E \langle x, y^*\rangle\, d\mu(y^*) = x^*_0(x) = x^*(x).$$

□

Per K generale (non metrizzabile) vale almeno il seguente teorema. Esso generalizza il teorema di Choquet, in quanto negli spazi metrizzabili ogni insieme chiuso è G_δ (e lo è anche $\operatorname{ext} K$).

Theorem 6.4 (Bishop–de Leeuw, 1959)**.** *Siano X uno spazio t. v. localmente convesso, $K \subset X$ un insieme convesso compatto, Σ la più piccola σ-algebra contenente sia tutti i sottoinsiemi compatti di tipo G_δ di K sia l'insieme* $\operatorname{ext} K$*. Allora per ogni $x \in K$ esiste una misura $\mu\colon \Sigma \to [0, +\infty)$ tale che $\mu(\operatorname{ext} K) = \mu(K) = 1$ e x è il baricentro di μ.*

N.B.: Se K non è metrizzabile, la σ-algebra Σ può essere strettamente contenuta in $\mathcal{B}$ (la σ-algebra dei boreliani).