<u>Integrale di Pettis</u> (L.V.)

Siano X uno spazio vettoriale normato e (Ω, Σ, μ) uno spazio misurabile con una misura non negativa.

L'integrale di Pettis (o "integrale debole") rappresenta una delle possibili definizioni di integrale per funzioni a valori in X. (Per chi conosce l'integrale di Bochner: *se $f\colon \Omega \to X$ è integrabile secondo Bochner allora è anche integrabile secondo Pettis, ma non vice versa.*)

Definition 0.1. Diciamo che una funzione $f\colon \Omega \to X$ è *integrabile secondo Pettis* (o, brevemente, *P-integrabile*) se esiste un punto $x_0 \in X$ tale che, per ogni $u^* \in X^*$,

$$u^* \circ f \in L_1(\mu) \qquad \text{e} \qquad u^*(x_0) = \int_\Omega (u^* \circ f)\, d\mu.$$

(Si noti che tale x_0, se esiste, è unico. *Perché?*)
L'elemento x_0 viene chiamato *l'integrale di Pettis* di f. Useremo la notazione

$$x_0 = \int_\Omega f\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Remark 0.2. (a) La definizione dice che l'integrale di Pettis soddisfa $u^*\left(\int f\, d\mu\right) = \int (u^* \circ f) d\mu$, cioè che l'integrale di Pettis e un funzionale lineare continuo sono intercambiabili.
Segue facilmente dalla definizione che l'integrale di Pettis e un qualsiasi operatore lineare continuo sono intercampbiabili. Più precisamente: *se $f\colon \Omega \to X$ è P-integrabile e $T\colon X \to Y$ è un operatore continuo lineare, allora la funzione composta $T \circ f\colon \Omega \to Y$ è P-integrabile con l'integrale di Pettis $\int (T \circ f)\, d\mu = T\left(\int f\, d\mu\right)$.* In effetti, per ogni $v^* \in Y^*$ si ha $v^*\big(T\left(\int f\, d\mu\right)\big) = (v^* \circ T)\left(\int f\, d\mu\right) = \int (v^* \circ T \circ f)\, d\mu = \int v^* \circ (T \circ f)\, d\mu$.

(b) Si osservi che $f\colon \Omega \to X$ è P-integrabile se e solo se il funzionale (lineare) $u^* \mapsto \int (u^* \circ f)\, d\mu$ è ben definito e w^*-continuo su X^*.

(c) (Caso $X = \mathbb{R}^d$.) Una funzione $f = (f_1, \dots, f_d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ è P-integrabile se e solo se ogni sua componente f_i è integrabile secondo Lebesgue; in tal caso $\int f\, d\mu = \left(\int f_1\, d\mu, \dots, \int f_d\, d\mu\right)$. (*Perché?*)

(d) (Caso di funzioni semplici.) Sia $f\colon \Omega \to X$ della forma $f = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \chi_{E_i}$ con $x_i \in X$ e $\mu(E_i) < +\infty$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Allora f è P-integrabile con $\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^m x_i \mu(E_i)$. (*Perché?*)

Observation 0.3. *Siano X uno spazio normato e $Y \subset X$ un suo sottospazio chiuso. Una funzione $f\colon \Omega \to Y$ è P-integrabile come una funzione a valori in Y se e solo se f è P-integrabile come una funzione a valori in X; in tal caso i due integrali di Pettis coincidono.*

Proof. Se $y_0 \in Y$ è l'integrale di Pettis di f relativo a Y, è immediato vedere che y_0 è anche l'integrale di Pettis di f relativo a X. (Si osservi che, per questa implicazione, non abbiamo sfruttato l'ipotesi $\overline{Y} = Y$.)

Sia ora $x_0 \in X$ l'integrale di Pettis di f relativo a X. Se x_0 non appartenesse a Y, esisterebbe un funzionale $u^* \in X^*$ tale che $u^*{}_{|Y} \equiv 0$ e $u^*(x_0) > 0$, e quindi si avrebbe $0 < u^*(x_0) = \int(u^* \circ f)d\mu = 0$ (f ha valori in Y!), una contraddizione. Perciò, $x_0 \in Y$. Il resto segue facilmente dal fatto che ogni elemento di Y^* è la restrizione a Y di un elemento di X^*. □

Presentiamo ora due condizioni sufficienti per l'integrabilità secondo Pettis (i teoremi **??** e **??**).

Theorem 0.4. *Sia $f\colon \Omega \to X$ tale che $u^* \circ f \in L_1(\mu)$ per ogni $u^* \in X^*$. Se X è riflessivo, allora f è P-integrabile.*

Proof. Definiamo un operatore lineare $T\colon X^* \to L_1(\mu)$ con la formula $Tu^* = u^* \circ f$. Per dimostrare che T è continuo, basta dimostrare che T ha grafico chiuso.

Supponiamo che $u_n^* \to u^*$ (in X) e $Tu_n^* \to g$ in $L_1(\mu)$. La prima condizione implica che $u_n^* \circ f \to u^* \circ f$ puntualmente in Ω (*perché?*); la seconda dice che $u_n^* \circ f \to g$ in $L_1(\mu)$, per cui esiste una sottosuccessione $\{n_k\}$ dei naturali tale che $u_{n_k}^* \circ f \to g$ puntualmente μ-quasi ovunque in Ω. Perciò $g = u^* \circ f = Tu^*$. Per il teorema del grafico chiuso, T è continuo.

Il funzionale lineare $u^* \mapsto \int(u^* \circ f)\, d\mu$ è continuo, essendo composizione di due applicazioni continue. Esso quindi appartiene a $X^{**} \cong X$; ciò completa la dimostrazione (*perché?*). □

Corollary 0.5. *Supponiamo che X sia riflessivo, la misura μ sia finita e $f\colon \Omega \to X$ sia limitata e tale che le composizioni $u^* \circ f$ ($u^* \in X^*$) siano misurabili. Allora f è P-integrabile.*

Per dimostrare Teorema **??** avremo bisogno di un corollario (Lemma **??**) del seguente teorema di Krein-Šmulyan di cui ommettiamo la dimostrazione (che può essere trovata, per esempio, nel libro N. Dunford & J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*).

Theorem 0.6 (Krein-Šmulyan)**.** *Siano X uno spazio di Banach e $L \subset X$ un suo sottospazio lineare. Allora L è w^*-chiuso se e solo se $L \cap B_{X^*}$ è w^*-chiuso.*

Lemma 0.7. *Sia X uno spazio di Banach separabile. Un funzionale lineare $\Phi\colon X^* \to \mathbb{R}$ è w^*-continuo se e solo se Φ è w^*-continuo per successioni.*

Proof. Ricordiamo che, essendo X separabile, (B_{X^*}, w^*) è metrizzabile, e quindi i sottoinsiemi w^*-chiusi di B_{X^*} sono esattamente quelli w^*-chiusi per successioni. Se Φ è w^*-continuo per successioni, $\Phi^{-1}(0) \cap B_{X^*}$ è w^*-chiuso per successioni, e quindi anche w^*-chiuso. Per il teorema di Krein-Šmulyan, il nucleo $\Phi^{-1}(0)$ è w^*-chiuso. Ciò implica la w^*-continuità di Φ. L'altra implicazione è ovvia. $\square$

Theorem 0.8. *Sia X uno spazio di Banach. Supponiamo che $f\colon \Omega \to X$ soddisfi le seguenti condizioni:*

- *f è misurabile (cioè le controimmagini degli aperti appartengono alla σ-algebra Σ);*
- *$f(\Omega)$ è separabile;*
- *$\|f(\cdot)\| \in L_1(\mu)$.*

Allora f è P-integrabile.

Proof. Il sottospazio $Y = \overline{\operatorname{span}}\, f(\Omega)$ è separabile (*perché?*). Secondo Osservazione **??**, possiamo suppore che X sia separabile.

Il funzionale $\Phi(u^*) = \int (u^* \circ f)\, d\mu$ è ben definito e continuo su X^* perchè le composizioni $u^* \circ f$ $(u^* \in X^*)$ sono misurabili e

$$\big|(u^* \circ f)(\omega)\big| \le \|u^*\| \cdot \|f(\omega)\| \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Vogliamo dimostrare che Φ è w^*-continuo (Remark **??**(b)). Lemma **??** afferma che basta dimostrare che Φ è w^*-continuo per successioni.

Supponiamo che $u_n^* \xrightarrow{w^*} u^*$. La successione $\|u_n^*\|$ è limitata, cioè, $M := \sup_n \|u_n^*\| < +\infty$. Abbiamo:

- $u_n^* \circ f \to u^* \circ f$ puntualmente su Ω,
- $\big|u_n^*\big(f(\omega)\big)\big| \le M\big\|f(\omega)\big\|$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Secondo il teorema della convergenza dominata,

$$\Phi(u_n^*) = \int (u_n^* \circ f) d\mu \longrightarrow \int (u^* \circ f) d\mu = \Phi(u^*).$$

$\square$

Per il seguente esercizio ricordiamo che gli insiemi boreliani in uno spazio topologico sono definiti come gli elementi della più piccola σ-algebra $\mathcal{B}$ (di sottoinsiemi dello spazio in questione) contenente tutti gli aperti. Una misura definita su $\mathcal{B}$ viene chiamata boreliana. Una funzione f (definita sullo spazio in questione e a valori in uno spazio topologico) si dice boreliana se le controimmagini (tramite f) degli insiemi aperti appartengono a $\mathcal{B}$.

Esercizio.
Siano X uno spazio vettoriale normato, T uno spazio topologico, μ una misura (non negativa) boreliana finita su T, $f\colon T \to X$ una funzione e $C = \overline{\operatorname{conv}}\, f(T)$. Dimostrare le seguenti due affermazioni.

(a) Supponiamo che T sia compatto, X sia di Banach e f sia continua. Allora f è P-integrabile con $\int_T f\, d\mu \in C$.

(b) Supponiamo che f sia boreliana e l'insieme C sia compatto in X. Allora f è P-integrabile con $\int_T f\, d\mu \in C$ (anche se X non è necessariamente di Banach).