Proprietà di Lindelöf in spazi metrici
L.V., marzo 2015

Per semplicità, con *numerabile* intendiamo "al più numerabile" (cioè, finito o infinito numerabile).

Definizione 1. Sia X uno spazio metrico.

(i) Diciamo che X è *separabile* se contiene un sottoinsieme denso numerabile.
(ii) Una famiglia $\mathcal{B}$ di insiemi aperti in X è detta *base della topologia* di X se ogni insieme aperto di X è unione di una sottofamiglia di $\mathcal{B}$.
(iii) Diciamo che X è *di Lindelöf* se ogni copertura aperta di X ammette una sottocopertura numerabile.

Notazione 2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Con $B(x, r)$ denotiamo la bolla aperta centrata in x e di raggio r, cioè,

$$B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}.$$

Teorema 3. *Per uno spazio metrico (X, d), le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X è separabile;*
(ii) *la topologia di X ha una base numerabile;*
(iii) *X è di Lindelöf.*

Breve dimostrazione.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $C \subset X$ un insieme denso numerabile. È facile vedere che la famiglia numerabile

$$\{B(c, r) : c \in C, r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$$

è una base della topologia di X.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia $\mathcal{A}$ una copertura aperta di X. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile della topologia di X. Chiaramente, la sottofamiglia

$$\mathcal{B}_0 := \{B \in \mathcal{B} : \ B \subset A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\}$$

è una copertura numerabile di X. Ad ogni $B \in \mathcal{B}_0$ associamo un $A_B \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A_B$. Allora la famiglia

$$\mathcal{A}_0 := \{A_B : B \in \mathcal{B}_0\}$$

è una sottocopertura numerabile di X, estratta da $\mathcal{A}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Per $n \in \mathbb{N}$, applichiamo la proprietà di Lindelöf alla copertura $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$; ne segue che esiste un insieme numerabile $C_n \subset X$ tale che le bolle $B(c, \frac{1}{n})$ con $c \in C_n$ ricoprono X. Ora, l'insieme numerabile $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ è denso in X. $\square$