Prodotto di serie secondo Cauchy
L.V., marzo 2015

In quanto segue, $\{a_n\}_0^{+\infty}$ e $\{b_n\}_0^{+\infty}$ sono due successioni in $\mathbb{C}$.

- *Questo è molto facile:*
  se le serie $\sum_0^{+\infty} a_n$ e $\sum_0^{+\infty} b_n$ convergono [convergono assolutamente] e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora anche la serie
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$
  converge [converge assolutamente] e la sua somma vale
  $$\alpha \left(\sum_0^{+\infty} a_n\right) + \beta \left(\sum_0^{+\infty} b_n\right) .$$

Per il prodotto di due serie abbiamo il seguente, molto utile teorema di Cauchy.

Teorema (prodotto secondo Cauchy). *Supponiamo che le serie*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$
convergano assolutamente e le loro somme siano $A, B \in \mathbb{C}$ rispettivamente. Poniamo
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \geq 0).$$
Allora anche la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$
converge assolutamente e la sua somma vale AB.

In breve, questo teorema dice che
$$\left(\sum_0^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_0^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$
se le due serie a sinistra convergono assolutamente (e in tal caso anche la serie a destra converge assolutamente).

Dimostrazione del teorema.
Per $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotiamo $I_N := \{0, 1, \dots, N\}$ e osserviamo che

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}| \right) &= \sum_{\substack{k,j \in I_N \\ k+j \leq N}} |a_k| \cdot |b_j| \\ &\leq \sum_{k,j \in I_N} |a_k| \cdot |b_j| = \left(\sum_{k \in I_N} |a_k| \right) \left(\sum_{j \in I_N} |b_j| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |b_j| \right).\end{aligned}$$

Ne segue che la serie $\sum_0^{+\infty} c_n$ converge assolutamente. Inoltre,

$$\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{\substack{k,j \in I_N \\ k+j \leq N}} a_k b_j = \left(\sum_{k \in I_N} a_k \right) \left(\sum_{j \in I_N} b_j \right) - e_N$$

dove

$$e_N = \sum_{\substack{k,j \in I_N \\ k+j > N}} a_k b_j \,.$$

Per dimostrare che $\sum_0^{+\infty} c_n = AB$, è sufficiente dimostrare che $e_N \to 0$.

Fissiamo un arbitrario $\varepsilon > 0$. Sia $d > 0$ tale che $\sum_0^{+\infty} |a_n| \leq d$, $\sum_0^{+\infty} |a_n| \leq d$. Dalle nostre ipotesi segue che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n>\nu} |a_n| \leq \varepsilon$, $\sum_{n>\nu} |b_n| \leq \varepsilon$. Osserviamo inoltre che se $k + j > N$ allora necessariamente $k > \frac{N}{2}$ oppure $j > \frac{N}{2}$. Ora, per ogni $N > 2\nu$ abbiamo $\frac{N}{2} > \nu$ e quindi

$$\begin{aligned}|e_N| \leq \sum_{\substack{k,j \in I_N \\ k+j > N}} |a_k| \cdot |b_j| &\leq \left(\sum_{\substack{k \in I_N \\ k > N/2}} |a_k| \right) \left(\sum_{j \in I_N} |b_j| \right) + \left(\sum_{k \in I_N} |a_k| \right) \left(\sum_{\substack{j \in I_N \\ j > N/2}} |b_j| \right) \\ &\leq \varepsilon \cdot d + d \cdot \varepsilon = 2d\varepsilon.\end{aligned}$$

Ciò dimostra che $e_N \to 0$.
[q.e.d.]