REGISTRO DELLE ESERCITAZIONI DI ANALISI COMPLESSA
corso della prof.ssa M. Salvatori, 2014–2015

02/03/2015 [2 ore: 1,2]

- *Ripasso sui numeri complessi* – forme algebrica, vettoriale (cartesiana), trigonometrica, esponenziale; parti reale e immagginaria (anche quest'ultima è un numero reale), modulo, argomento ("angolo"); $\mathbb{C}$ come un campo non ordinabile; formula di De Moivre, ricerca delle "radici n-esime".

- *Esercizi*
  (i) $\frac{1}{-3+2i}$
  (ii) $(i\sqrt{3}-1)^5$
  (iii) $(z+2i)^4 = (3+3i)^4$
  (iv) $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

- Ripasso: la convergenza in $\mathbb{C}$ è quella in $\mathbb{R}^2$, cioè la convergenza per coordinate. In altre parole, una successione in $\mathbb{C}$ è convergente se e solo se sono convergenti la successione delle reali e quella delle parti immagginarie.

- *Serie di numeri complessi* – definizione di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$; convergenza assoluta implica quella semplice che, a sua volta, implica che il termine generale tende a 0 (e non valgono i vice versa); condizione di Cauchy.

- *Serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
  Possiamo limitarci al caso $z_0 = 0$, cioè alle serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad (\text{con } a_n \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

  Le seguenti affermazioni si dimostrano esattamente come nel caso di serie di potenze in $\mathbb{R}$.
  (i) Se $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e la serie (1) converge per $z = w_0$, allora essa converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ appartenente al disco $D(0, |w_0|) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < |w_0|\}$. Inoltre, la convergenza è uniforme su ogni compatto contenuto in quel disco.
  (ii) Esiste un unico $R \in [0, +\infty]$ tale che:

(a) la serie converge asolutamente nel disco aperto $D(0,R)$ (e uniformemente in ogni compatto ivi contenuto);
(b) la serie non converge per $|z|>R$, in quanto il termine generale non tende a 0.

(iii) $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(iv) $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ se il limite esiste (in generale non vale con "limsup").

- *Esempi:* $\sum_1^{+\infty} n!z^n$, $\sum_2^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_0^{+\infty} z^n$, $\sum_1^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $\sum_1^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (quest'ultima, con $R=1$, non converge per $z=1$ ma converge per $|z|=1$, $z\neq 1$ [non dimostrato]).

- *Esercizio.* Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{n+3i}{in-1}\right)^{n^4} z^{n^2}\,.$$

È una serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ dove

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{n+3i}{in-1}\right)^{n^4} = \left(\frac{\sqrt{k}+3i}{i\sqrt{k}-1}\right)^{k^2} & \text{se } k=n^2 \text{ con } n\geq 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- **Esercizi per voi.**
  (i) Rappresentare graficamente i seguenti insiemi:
    - $A = \{z\in\mathbb{C}:\ 1<|z|\leq 3,\ \mathrm{Re}(z)\leq 0,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$,
    - $B = \{z\in\mathbb{C}:\ z=w^2 \text{ con } w\in A\}$,
    - $C = \{z\in\mathbb{C}:\ z^2\in A\}$.

  (ii) Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, determinare le soluzioni (in $\mathbb{C}$) dell'equazione

$$|z|^4\bar{z}+\alpha z^3 = 0\,.$$

06/03/2015 [2 ore: 3,4]

- $A,B\subset\mathbb{C}$, $A\cap B=\emptyset$, A compatto, B chiuso $\Rightarrow$ $\mathrm{dist}(A,B)>0$.
(Si può procedere per assurdo, oppure usando il fatto che la funzione $x\mapsto \mathrm{dist}(x,B)$ è continua.)

- $E \subset \mathbb{C}$, $E' \cap E = \emptyset \ \Rightarrow \ E$ è al più numerabile.
(Ad ogni $x \in E$ associamo il disco aperto $D_x := D(x, r_x/2)$ dove $r_x > 0$ è tale che $D(x, r_x) \cap E = \{x\}$. I dischi D_x $(x \in E)$ sono a due a due disgiunti. In alternativa, si potrebbe usare la proprietà di Lindelöf: uno spazio metrico è separabile [cioè, ammette un sottoinsieme denso al più numerabile] se e solo se ha la seguente *proprietà di Lindelöf*: ogni sua copertura aperta ammette una sottocopertura al più numerabile [si veda il relativo file sulla mia pagina web].)

- $D \subset \mathbb{C}$ è un *dominio* se D è aperto e connesso (cioè, D non può essere scritto come unione di due aperti disgiunti non vuoti).
Ripasso. Un aperto $D \subset \mathbb{C}$ è connesso se e solo se è connesso per archi se e solo se è connesso per poligonali.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}$
(Si potrebbe procedere come nell'ultimo esercizio della volta scorsa, ma in questo caso è più semplice porre $w = z^2$.)

- **Teorema (prodotto di serie secondo Cauchy).** *Supponiamo che le serie (in $\mathbb{C}$) $\sum_0^{+\infty} a_n$ e $\sum_0^{+\infty} b_n$ convergano assolutamente. Allora*
$$\left(\sum_0^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_0^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$
dove l'ultima serie converge assolutamente.

- *L'esponenziale complessa.*
Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} .$$
Questa serie converge assolutamente in $\mathbb{C}$ e uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{C}$ (e quindi la sua somma è una funzione continua).
  - $e^{it} = \cos t + i \sin t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
  - $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
  Corollario importante: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.
  - $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ $(\leq e^{|z|})$.
  (Commento: in generale, se $f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n$ con $a_n \in \mathbb{R}_+$ allora abbiamo $|f(z)| \leq f(|z|)$.)

- Dato $z \in \mathbb{C}$, determinare le soluzioni (in $\mathbb{C}$) di
$$e^w = z.$$
Se $z = 0$, non vi sono soluzioni.
Se $z \neq 0$ e $z = |z|e^{i\theta}$ (con $\theta \in \mathbb{R}$), allora le soluzioni sono infinite:
$$w = \ln|z| + i\theta + i2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- *Corollario.* Per $f(z) = e^z$ abbiamo le seguenti proprietà:
  (i) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
  (ii) f è $2\pi i$-periodica (cioè, $f(z + 2\pi i) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$);
  (iii) per ogni striscia orizzontale del tipo
  $$E = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$$
  (oppure con le due disuguaglianze scambiate), f definisce una corrispondenza biunivoca tra E e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- *Logaritmo complesso.* Per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ di forma esponenziale $z = |z|e^{i\theta}$, definiamo gli insiemi
$$\arg(z) := \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{\theta' \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta'}\}$$
(*argomento* di z), e
$$\log z = \{\ln|z| + i\theta + i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i\arg(z)$$
(*logaritmo [complesso] di* z).
Esiste l'unico $\theta_0 \in \arg(z)$ tale che $-\pi < \theta_0 \leq \pi$; definiamo
$$\mathrm{Arg}(z) = \theta_0$$
(*argomento principale* di z). Il numero complesso
$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\theta_0 = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$$
è detto il *valore principale del logaritmo* di z (o il *logaritmo principale di* z). In questo modo, chiaramente, $\mathrm{Arg}(z) \in \arg(z)$, $\mathrm{Log}(z) \in \log z$.

- Sia $f(z) = e^z$. Allora f manda:
  * la retta verticale $\{\mathrm{Re}(z) = x_0\}$ nella circonferenza di raggio e^{x_0} (centrata in 0);
  * la retta verticale $\{\mathrm{Im}(z) = y_0\}$ nella semiretta aperta dall'origine, corrispondente all'angolo y_0;
  * il rettangolo $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ nel settore di corona circolare $\{re^{i\theta} : 1 \leq r \leq e^\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$;
  * la striscia aperta orizzontale $-\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi$ nel piano complesso privato della semiretta reale negativa chiusa.

- La prossima volta cercheremo le soluzioni di $\sin(z) = 3$.
- **Esercizio per voi.** Dati $a, b, n \in \mathbb{N}$, dimostrare che esistono $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che
$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2.$$

16/03/2015 [2 ore: 5,6]

- Le soluzioni di $\sin z = 3$.
- $\sin(x + iy) = \sin x \cdot \mathrm{Ch}(y) + i \cos x \cdot \mathrm{Sh}(y)$,
da cui $|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \mathrm{Sh}^2(y)$,
da cui: $\sin z = 0$ se e solo se $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- La funzione $\sin z$ non ha altri periodi di $2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- In quali punti la funzione $f(x + iy) = x^2 + iy^3$ è derivabile (in senso complesso)?
- La funzione
$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$
soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in $z = 0$, ma non vi è derivabile (non essendo neanche continua).
- Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n$.
- Sviluppare $f(z) = \cos z$ in serie di potenze centrata in $z_0 = 2i$.
- Sviluppare $g(z) = \frac{1}{z-1+i}$ in serie di potenze centrata:
(a) in $z_0 = 0$;
(b) in $z_0 = 1$.
- Sviluppare $h(z) = \frac{z^2-1}{z^2+4}$ in serie di potenze centrata:
(a) in $z_0 = 0$;
(b) in $z_0 = -i$.

- Un (apparente) paradosso:
$$1 = 1^{1/2} = (e^{2\pi i})^{1/2} = e^{\pi i} = -1.$$
In realtà, valgono solo la seconda e la quarta uguaglianza (infatti, si verifica che $1^{1/2} = (e^{2\pi i})^{1/2} = \{\pm 1\}$).

- Due sempici **esercizi per voi**:
(i) Sia u una funzione armonica in un aperto $A \subset \mathbb{C}$. La funzione
$$f(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$$
è armonica in A?
(ii) In quali punti di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la funzione $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ è derivabile?

23/03/2015 [2 ore: 7,8]

- Ripasso su integrazione lungo curve in $\mathbb{C}$.

- *Osservazione.* Se φ (a valori complessi) è derivabile in $t_0 \in \mathbb{R}$ e F (a valori complessi) è derivabile in $z_0 := \varphi(t_0)$, allora $F \circ \varphi$ è derivabile in t_0 con
$$(F \circ \varphi)'(t_0) = F'(z_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

- Calcolare
$$\int_{\partial D} \frac{1}{\bar{z}+i}\, dz$$
dove $D = \{|z| < 1, \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

- Sia $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Al variare di $0 < r \neq |z_0|$ calcolare
$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{z}\, dz\,.$$

- **Mappe di Möbius.**
$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
dove $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $|c|^2 + |d|^2 \neq 0$.
Lemma. Sia E_φ l'insieme di definizione di φ. Sono equivalenti:
(i) φ non è costante in E_φ;
(ii) $ad - bc \neq 0$;
(iii) φ è iniettiva in E_φ.

Inoltre, se $(i)-(iii)$ sono vere allora φ può essere estesa a un omeomorfismo di $\mathbb{S}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Osservazione. Sia φ una trasformazione di Möbius non costante. Allora:

(i) anche φ^{-1} è una trasformazione di Möbius (con lo stesso "determinante");

(ii) φ è una composizione di trasformazioni del tipo

$$z \mapsto Az+B \text{ con } A\neq 0 \quad \text{oppure } z\mapsto \frac{1}{z}\,.$$

- Siano $a,c\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{C}$, con $a^2+|b|^2\neq 0$. Descrivere l'insieme delle soluzioni Σ dell'equazione

$$az\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0\,.$$

Caso $a=0$. In questo caso Σ è una retta. E vice versa: ogni retta è l'insieme delle soluzioni dell'equazione del nostro tipo con $a=0$.

Caso $a\neq 0$. Da fare la prossima volta.

30/03/2015 [2 ore: 9,10]

- L'insieme Σ delle soluzioni dell'equazione $az\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0$ $(a,c\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{C}$, $a^2+|b|^2>0)$ – continuazione.

Caso $a\neq 0$. Possiamo supporre che $a=1$. In questo caso

$$\Sigma \text{ è } \begin{cases} \text{vuoto} & \text{se } |b|^2-c<0;\\ \text{il singoletto } \{-\bar{b}\} & \text{se } |b|^2-c=0;\\ \text{la circonferenza } \partial D(-\bar{b},\sqrt{|b|^2-c}) & \text{se } |b|^2-c>0. \end{cases}$$

Inoltre, vale anche il vice versa: ogni circonferenza è l'insieme delle soluzioni della nostra equazione per opportuni b,c $(a=1)$.

- Sia $i:\mathbb{S}\to\mathbb{S}$ l'inversione $i(z)=1/z$ $(i(0)=\infty$, $i(\infty)=0)$. Sia E una retta o una circonferenza. Allora $i(E)$ è:
  - una retta se $0\in E$;
  - una circonferenza se $0\notin E$.

Corollario. Sia $\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ una trasformazione di Möbius non degenere (cioè, $ad-bc\neq 0$).
  - Se $c=0$ (e quindi φ è affine), φ manda rette in rette, e circonferenze in circonferenze.

◦ Se $c \neq 0$ (e quindi $\varphi = \alpha \circ i \circ \beta$ dove α, β sono affini, e i è l'inversione), φ manda rette in rette/circonferenze, e circonferenze in rette/circonferenze.

- Sviluppare in serie di potenze, centrata in 0, la funzione $h(z) = \frac{e^z}{z^2+i}$.

- Determinare il coefficiente di $(z-1)^7$ nello sviluppo di $f(z) = \frac{\mathrm{Ch}(z-1)}{z}$, e determinare il raggio di convergenza della serie.

- $$\int_{\partial D(2+i,\sqrt{2})} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}\, dz$$

- Sapendo che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, calcolare i seguenti <u>*integrali di Fresnel*</u>
$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt\,, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt\,.$$
Esistenza. Con una sostituzione e un'integrazione per parti si dimostra che i due integrali esistono in senso improprio secondo Riemann.

  Calcolo. I nostri due integrali sono la parte reale e quella immaginaria dell'integrale
$$J := \int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt\,.$$
Integriamo la funzione $f(z) = e^{iz^2}$ lungo le curve $\gamma_R = \partial D_R$ dove D_R è il "trancio di pizza"
$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < R, \ 0 < \mathrm{Arg}(z) < \tfrac{\pi}{4}\}.$$
Da una parte, questi integrali sono nulli (teorema di Cauchy). Dall'altra, essi consistono di tre addendi: due integrali lungo segmenti e un integrale lungo un arco. Passando al limite per $R \to +\infty$, i due integrali su segmenti tendono a J e a un multiplo di $\sqrt{\pi}/2$, mentre gli interali su archi tendono a zero. Da qui si calcola il valore di J. Alla fine si ottiene che $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

- *Serie binomiale.* Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. La funzione $f(z) = (1+z)^\alpha$, intesa come il ramo principale (cioè, $f(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$), è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$. Essendo olomorfa nel disco $D(0,1)$, essa vi è la somma della sua serie di Taylor, cioè, $\sum_0^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$. Ne segue la formula
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha \qquad (\alpha, z \in \mathbb{C},\ |z| < 1).$$

13/04/2015 [2 ore: 11,12]

- Dimostrare che la somma della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{(1-z^k)(1-z^{k+1})}$$
è ben definita e olomorfa in $\{|z| \neq 1\}$.

- Determinare l'insieme E di convergenza puntuale della successione di funzioni
$$f_n(z) = z^n e^{-inz^2}$$
e stabilire se la funzione limite è olomorfa in E°.

- Determinare l'insieme
$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) > 0, \ \text{la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(3+4i)^n}{\cos(nz)} \ \text{ converge} \right\}$$
e stabilire se la somma della serie è olomorfa in Ω°.

- Ripasso sulla formula integrale di Cauchy.

- Calcolare $\displaystyle\int_{\partial D(0,3/4)} \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{2z-i}\,dz$.

- Al variare di $r > 0$, $r \notin \{\sqrt{2}\,, \sqrt{10}\,\}$, calcolare
$$I(r) = \int_{\partial D(i,r)} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)}\,dz \ .$$

- Calcolare $\displaystyle\int_{\partial D(-1,3)} \frac{\sin(z-1)}{z^2(z-1)}\,dz$.
(Abbiamo usato il fatto che la funzione $f(z) = (\sin w)/w$ coincide su $\{w \neq 0\}$ con una funzione intera [avente valore 1 in $w = 0$]; ciò può essere visto sviluppando $\sin w$.)

20/04/2015 [2 ore: 13,14]

- *Ancora maggiorazioni.* Dimostrare che la funzione $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ è limitata su ogni insieme $E_\delta := \{|\mathrm{Im}(z)| \geq \delta\}$, $\delta > 0$.

- Dati $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $0 < r < |a|$, calcolare
$$\int_0^{2\pi} \ln |re^{it} - a| \, dt \,.$$

- *Ripasso.* Singolarità eliminabili.

- Sia f una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che:
(a) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1 + i$,
(b) $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 2$,
(c) $\int_{|z|=1} f(z)\, dz = 3i$.
Determinare f!

- *Ripasso.* Serie di Laurent e sviluppabilità di funzioni olomorfe in corone circolari.

- Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$ in serie di Laurent nelle seguenti regioni:
(a) $\{0 < |z| < 1\}$;
(b) $\{|z| > 1\}$;
(c) $\{1 < |z - 1| < \sqrt{2}\}$.

- Per $0 < r < \pi$, calcolare
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{1}{\sin z} \, dz \,.$$
(Abbiamo integrato lo sviluppo di Laurent di $\frac{1}{\sin z}$ termine per termine, riducendo il problema alla determinazione del coefficiente a_{-1}. Abbiamo determinato tale coefficiente raccogliendo z dallo sviluppo in serie di potenze di $\sin z$.)

- Per $\alpha > 0$, calcolare
$$I_\alpha := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\alpha^2 + \sin^2 t} \, dt \,.$$
Usando simmetrie, abbiamo calcolato:
$I_\alpha = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 t - (i\alpha)^2} \, dt = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2i\alpha} \left(\frac{1}{\sin t - i\alpha} - \frac{1}{\sin t + i\alpha} \right) \, dt$
$\quad = \frac{1}{4i\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin t - i\alpha} \, dt = \frac{1}{2i\alpha} \int_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z^2 + 2\alpha z - 1} \, dt$
e abbiamo poi applicato la formula di Cauchy.
Risultato: $I_\alpha = \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}$.

27/04/2015 [2 ore: 15,16]

- *Ripasso – singolarità isolate.* Se $f \in H(\{0 < |z - z_0| < r\})$ e $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ è il suo sviluppo di Laurent, allora il residuo di f in z_0 è definito come
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$
Denotiamo $M = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0, a_n \neq 0\}$. La singolarità è di uno dei seguenti tre tipi:
  - *singolarità eliminabile* $\equiv$ esiste finito $\lim_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow M = \emptyset \Leftrightarrow$ f è limitata in un intorno di z_0;
  - *polo* $\equiv \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow M$ è finito non vuoto;
  - *singolarità essenziale* $\equiv \lim_{z\to z_0} f(z)$ non esiste $\Leftrightarrow M$ è infinito $\Leftrightarrow$ l'immagine di ogni intorno di z_0 è densa in $\mathbb{C}$.

  Inoltre, se z_0 è un polo per f e $k = -\min M$, allora z_0 è detto un k-polo.

- *Ripasso – ∞ come singolarità isolata.* Se $f \in H(\{|z| > r\})$ e l'insieme M relativo al suo sviluppo di Laurent è, questa volta,
$$M = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0, a_n \neq 0\},$$
definiamo $\mathrm{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$. La classificazione è analoga:
  - ∞ è una *singolarità eliminabile* $\equiv$ esiste finito $\lim_{z\to\infty} f(z) \Leftrightarrow$ $M = \emptyset$;
  - *polo* $\equiv \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow M$ è finito non vuoto; (k-polo dove $k = \max M$);
  - *singolarità essenziale* $\equiv \lim_{z\to\infty} f(z)$ non esiste $\Leftrightarrow M$ è infinito.

  Se, inoltre, $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\})$ allora
$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

- *Come calcolare i residui?*
  (i) Sviluppando.
  (ii) C'è anche la seguente comoda *regoletta*: se f, g sono olomorfe in un intorno di z_0 e z_0 è uno zero semplice per g, allora
$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(iii) Un'altra *regola*, non sempre conveniente: se f ha un k-polo in z_0 (con $k \in \mathbb{N}$) allora

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\, D^{k-1}\big[(z-z_0)^k f(z)\big]\Big|_{z\to z_0}.$$

- $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$. Classificare le singolarità isolate e calcolare i relativi residui.

- $f(z) = \dfrac{z^5}{(1+iz)^2}$. Idem.

- $f(z) = \dfrac{e^z \sin(1/z)}{z}$. Idem. Classificare poi le singolartà della funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.

- $f(z) = \dfrac{(z^2-1)(z-1)}{e^{1/z} - e^z}$. Idem.

- $f(z) = \dfrac{z+3}{e^{1/z} - 5}$. Idem. [Da terminare – *esercizio.*]

- **Esercizio per voi.** $f(z) = \dfrac{z(z^2+4)}{\mathrm{Sh}(\pi z)}$. Idem.

04/05/2015 [2 ore: 17,18]

- *Tipologia 0.* Calcolo di integrali del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$$

dove $R = R(x, y)$ è una funzione razionale continua su $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Si ha $I = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right) dz$ e questo integrale può essere calcolato usando il teorema dei residui.

- *Esempio.* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + \sin x}\, dx \quad (a > 1).$

- *Tipologia 1.* Integrali del tipo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$
oppure
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \begin{Bmatrix} e^{ix} \\ \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} dx.$$
.

  Integrare, rispettivamente $f(z) = R(z)$ o $f(z) = R(z)e^{iz}$ lungo il bordo di
$$\{|z| < r,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
e far tendere $r \to +\infty$, con eventuali "deviazioni" attorno ai poli reali (in tal caso, l'integrale è inteso nel senso del "valor principale secondo Cauchy"). Con le "deviazioni" risulta molto utile il seguente lemma.

- **Lemma di Jordan.** *Supponiamo che f abbia in z_0 un polo semplice. Date le curve*
$$\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}\,, \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$
si ha che
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varphi_\varepsilon} f \;= i(\beta - \alpha)\,\mathrm{Res}(f, z_0)\,.$$

- *Esempio 1.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{a^2 + x^{2k}}\,dx$ dove $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$.
(L'int. esiste in senso improprio di Riemann (e anche Lebesgue) se e solo se $k \geq 2$. Per $k \geq 2$ dispari, esso vale ovviamente 0.)

- *Esempio 2.* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$

- **Esercizio per voi.**
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x+a)(x^2+1)}\,dx \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$
(Attenzione: il senso in cui l'int. esiste dipende dal valore di a!)

11/05/2015 [2 ore: 19,20]

- *Tipologia 2.* Gli integrali
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x)\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x)\,e^{ix}\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x)\,x\,dx$$
possono essere calcolati integrando, rispettivamente,
$$f(z) = R(e^z)\,, \qquad f(z) = R(e^z)\,e^{iz}\,, \qquad f(z) = R(e^z)\,z$$
lungo la frontiera dei rettangoli
$$\big\{|\operatorname{Re}(z)| \le r\,,\ 0 \le \operatorname{Im}(z) \le 2\pi\,\big\} \qquad (r > 0)$$
facendo tendere $r \to +\infty$.

- *Esempio.* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\operatorname{Ch}(x)}\,dx$.
($I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\operatorname{Ch}(x)}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(J)$ dove $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{Ch}(x)}\,e^{ix}\,dx = \ldots$)

- *Tipologia 3.* Gli integrali
$$\int_0^{+\infty} x^a\,R(x^m)\,dx \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ m \ge 2$$
possono essere calcolati integrando
$$f(z) = e^{a\operatorname{Log}(z)}\,R(z^m)$$
lungo la frontiera di
$$\big\{\,\varepsilon \le |z| \le r\,,\ 0 \le \operatorname{Arg}(z) \le \tfrac{2\pi}{m}\,\big\}$$
facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$, $r \to +\infty$.
(Qui, $\operatorname{Log}(z)$ e $\operatorname{Arg}(z)$ denotano il ramo principale del logaritmo e l'argomento principale. Si osservi che, nel caso di $m = 2$, essi vanno considerati come opportuni limiti; alternativamente, essi possono essere sostituiti dai rami in cui viene eliminata la semiretta $(-\infty, 0]i$, anziché $(-\infty, 0]$).

- *Esempio.* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^3}\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$.
(Prima va studiata la convergenza dell'integrale; si ottiene che esso esiste finito [sia nel senso improprio di Riemann sia come integrale di Lebesgue] se e solo se $-1 < a < 2$. Per tali a, applichiamo il nostro metodo.)

- Gli integrali
$$\int_0^{+\infty} x^a\, R(x)\, dx \ (a \notin \mathbb{Z}), \qquad \int_0^{+\infty} R(x)\, dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} (\ln x)\, R(x)\, dx$$
possono essere calcolati integrando, rispettivamente,
$$\begin{aligned} f(z) &= e^{a\,\mathrm{Log}_{(2\pi)}(z)}\, R(z)\,, \\ f(z) &= \big(\,\mathrm{Log}_{(2\pi)}(z)\,\big)\, R(z)\,, \\ f(z) &= \big(\,\mathrm{Log}_{(2\pi)}(z)\,\big)^2\, R(z)\,, \end{aligned}$$
dove $\mathrm{Log}_{(2\pi)}(z)$ denota il ramo del logaritmo che si ottiene eliminando la semiretta reale $[0,+\infty)$, cioè,
$$\mathrm{Log}_{(2\pi)}(z) = \ln z + i\theta \qquad \text{dove } z = |z|e^{i\theta},\ 0 < \theta < 2\pi.$$
Si integra lungo la frontiera $\gamma_{\varepsilon,r}$ della regione
$$\big\{\, \varepsilon < |z| < r\,,\ z \notin [0,+\infty)\,\big\}$$
passando al limite $\varepsilon \to 0^+$, $r \to +\infty$. Il segmento orizzontale $[\varepsilon, r]$ viene percorso due volte:
  - ◦ una volta verso destra, come limite per $\mathrm{Arg}_{(2\pi)}(z) \to 0^+$;
  - ◦ una volta verso sinistra, come limite per $\mathrm{Arg}_{(2\pi)}(z) \to 2\pi^-$.

  Più precisamente, l'integrale lungo $\gamma_{\varepsilon,r}$ è il limite per $\alpha \to 0^+$ degli integrali lungo la frontiera di
$$\{\, z = |z|e^{i\theta} :\ \varepsilon < |z| < r,\ \alpha < \theta < 2\pi - \alpha\,\}.$$

- *Esempio 1.* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx\,.$

- *Esempio 2.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}\, dx\,.$

Fine esercitazioni corso da 6 CFU.

27/05/2015 [2 ore: 21,22]

Trasformazioni conformi (corrispondenze biolomorfe)

- *Ripasso* – il teorema di Riemann: *ogni due domini semplicemente connessi che siano non vuoti e diversi da tutto $\mathbb{C}$ sono conformemente equivalenti.*

  Le trasformazioni conformi *mantengono angoli e orientazioni* (nei punti del dominio di definizione, non necessariamente nei punti del suo bordo!).

- *Ripasso* – trasformazioni di Möbius $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$ sono trasformazioni conformi:
  – tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$, se $c = 0$;
  – tra $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, se $c \neq 0$.
  Inoltre, esse trasformano ogni retta/circonferenza in retta o circonferenza.

  Dati tre diversi punti punti $z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{C}$, è facile trovare una (la!) trasformazione di Möbius φ tale che
  $$z_0 \mapsto 0, \quad z_1 \mapsto 1, \quad z_\infty \mapsto \infty;$$
  infatti,
  $$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0}.$$
  L'inversione $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ è un'equivalenza conforme tra $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ e $D(0,1) \setminus \{0\}$.

- Trasformare:
  (a) $D(0,1)$ in $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$;
  (b) $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ in $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, usando (a).

- *Ripasso* – dato $|a| < 1$, la trasformazione di Möbius
  $$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$
  definisce un automorfismo (e quindi un'equivalenza conforme) di $D(0,1)$ tale che $a \mapsto 0$.

- Trasformare conformemente $\Omega := D(0,1) \setminus [\alpha, 1)$ (con $0 < \alpha < 1$) in $D(0,1) \setminus [0,1)$. Trasformare poi Ω nel semicerchio
  $$\{|z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

- Dati $\Omega = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ e $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$, determinare $\varphi(\Omega)$.
  (Risposta: $\varphi(\Omega) = D(0,1)$. *Esempio importante!*)

- *Alcuni esempi base*
  (i) $\frac{z-i}{z+i}$ trasforma il semipiano superiore nel disco unitario;

(ii) e^z trasforma strisce (e semi-strisce) orizzontali in "angoli" (in settori circolari o simili);

(iii) $z^{\pi/\beta}$ (ramo principale) con $0 < \beta < \pi$ trasforma l'angolo $\{re^{i\theta} : r > 0,\ 0 < \theta < \beta\}$ nel semipiano superiore. (Per $\pi < \beta \leq 2\pi$, bisognerebbe usare il ramo con $\mathrm{Arg}_{(2\pi)}(z) \in (0, 2\pi)$; oppure far ruotare prima l'angolo in modo che non contenga $(-\infty, 0]$.)

- Trasformare conformemente $\{|z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ nel primo quadrante.

- Trasformare conformemente $\{\mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus [0, a]i$ (con $a > 0$) nel semipiano superiore.

- Trasformare conformemente $\{|z| < 1, \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ nel semipiano superiore.

- Trasformare conformemente ciascuno dei seguenti domini nel disco $D(0, 1)$:
  (i) $\{|z \pm 1| < 2\}$;
  (ii) $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$;
  (iii) $\{\mathrm{Re}(z) > 0,\ 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$.

- Trasformare conformemente:
  (i) $\{\mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ in $D(0, 1)$;
  (ii) $\{|z| > 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ nel semipiano superiore.

FINE