## Come calcolare le somme di alcune serie

Prima di iniziare, definiamo alcuni tipi di convergenza di serie indicizzate con numeri *interi relativi*. Siano $E \subset \mathbf{Z}$ un insieme finito (eventualmente vuoto) e $g\colon Z \setminus E \to \mathbf{C}$ una funzione. Diciamo che la serie

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \notin E}}^{+\infty} g(k) \tag{$*$}$$

converge:

(a) *semplicemente* se esiste finito il limite $\displaystyle\lim_{m,n\to+\infty} \sum_{\substack{k=-m \\ k\notin E}}^{n} g(k)$;

(b) *assolutamente* se la serie $\displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\notin E}}^{+\infty} |g(k)|$ converge semplicemente;

(c) *come valor principale* (brevemente *v.p.*) se esiste finito il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\notin E}}^{n} g(k)$.

**Osservazioni semplici.**

(i) Sia $n_0 \in \mathbf{N}$ grande in modo che $E \subset (-n_0, n_0)$. La serie $(*)$ converge semplicemente [assolutamente] se e solo se convergono semplicemente [assolutamente] le serie $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} g(k)$ e $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} g(-k)$.

(ii) Si hanno le seguenti implicazioni:

$$\text{assolut.} \;\Rightarrow\; \text{semplic.} \;\Rightarrow\; \text{p.v. e } \lim_{|k|\to+\infty} g(k) = 0\,.$$

(iii) Se $g$ è dispari su $\mathbf{Z} \setminus (-n_0, n_0)$, allora la serie $(*)$ converge p.v.. In particolare, la convergenza p.v. non implica che $\lim_{|k|\to+\infty} g(k) = 0$.

Ora, siano $P, Q$ due polinomi tali che $\mathrm{gr}(Q) \geq \mathrm{gr}(P) + 1$. Consideriamo le serie

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ Q(k)\neq 0}}^{+\infty} \frac{P(k)}{Q(k)} \tag{1}$$

e

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ Q(k)\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{P(k)}{Q(k)}\,. \tag{2}$$

Se $\mathrm{gr}(Q) \geq \mathrm{gr}(P) + 2$, allora le serie (1) e (2) convergono assolutamente.
Sia $\mathrm{gr}(Q) = \mathrm{gr}(P) + 1$. Allora:

- se $P, Q$ sono a coefficienti reali, la serie (2) converge semplicemente (ciò segue dal criterio di Leigniz in quanto la derivata di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è anch'essa una funzione razionale e ha quindi segno costante sia definitivamente per $x \to +\infty$ sia definitivamente per $x \to -\infty$).
- le serie (1) e (2) convergono p.v.; infatti, possiamo scrivere $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ dove $\mathrm{gr}(Q_1) \geq \mathrm{gr}(P_1) + 2$, e, ovviamente, $\frac{a}{x}$ è dispari.

Per calcolare le somme delle serie (1) e (2) vengono usate le seguenti funzioni ausiliarie

$$h_1(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, \qquad h_2(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Siccome la funzione $\sin(\pi z)$ si annulla esattamente nei punti di $\mathbf{Z}$ e ogni suo zero è uno zero semplice, abbiamo la seguente importante proprietà (*verificate!*):

$$\mathrm{Res}\big(h_1(z)\tfrac{P(z)}{Q(z)}, k\big) = \tfrac{P(k)}{Q(k)}, \quad \mathrm{Res}\big(h_2(z)\tfrac{P(z)}{Q(z)}, k\big) = (-1)^k \tfrac{P(k)}{Q(k)} \qquad \text{se } k \in \mathbf{Z} \text{ e } Q(k) \neq 0. \tag{3}$$

Avremo bisogno del seguente, un po' tecnico, lemma. Ricordiamo che $B(z_0, \varepsilon)$ denota il disco aperto di raggio $\varepsilon$, centrato in $z_0$.

**Lemma.** *Per $n \in \mathbf{N}$, sia $\gamma_n = \partial B(0, n + \frac{1}{2})$. Sia $j \in \{1, 2\}$.*
*(I) Per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione $h_j$ è limitata su $\mathbf{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} B(k, \varepsilon)$.*
*(II) $\int_{\gamma_n} h_j(z) \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \to 0$ per $n \to +\infty$.*

*Dimostrazione.*
(I) Siccome $h_j$ è 2-periodica, è sufficiente considerare $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ e dimostrare la limitatezza sull'insieme (chiuso!) $L = \big([\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] \times \mathbf{R}\big) \setminus \big(B(1, \varepsilon) \cup B(2, \varepsilon)\big)$. E per dimostrare ciò, basta dimostrare che $h_j(z)$ è limitata per $|\mathrm{Im}(z)| \to +\infty$. Scriviamo $z = x + iy$ e maggioriamo:

$$\begin{aligned} |h_1(z)| &= \pi \frac{|e^{i\pi x} e^{-\pi y} + e^{-i\pi x} e^{\pi y}|}{|e^{i\pi x} e^{-\pi y} - e^{-i\pi x} e^{\pi y}|} \leq \frac{|e^{i\pi x} e^{-\pi y}| + |e^{-i\pi x} e^{\pi y}|}{\big||e^{i\pi x} e^{-\pi y}| - |e^{-i\pi x} e^{\pi y}|\big|} \\ &= \pi \frac{e^{\pi |y|} + e^{-\pi |y|}}{e^{\pi |y|} - e^{-\pi |y|}} \to \pi \qquad (|y| \to +\infty). \end{aligned}$$

Ciò dimostra la limitatezza di $h_1$ su $L$. Il caso di $h_2$ è completamente analogo.
(II) Dalla parte (I), già dimostrata, segue che esiste $M > 0$ tale che $|h_j(z)| \leq M$ per ogni $z \in \gamma_n$, $n \in \mathbf{N}$.
Se $d := \mathrm{gr}(Q) - \mathrm{gr}(P) \geq 2$, allora esiste $C > 0$ tale che, se $|z|$ è sufficientemente grande, si abbia $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|^d}$. Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbf{N}$ sufficientemente grande si ha

$$\left|\int_{\gamma_n} h_j(z) \tfrac{P(z)}{Q(z)}\, dz\right| \leq M \, \tfrac{C}{(n + \frac{1}{2})^d} \, 2\pi(n + \tfrac{1}{2})$$

e l'ultima quantità tende a 0 per $n \to +\infty$.
Se invece $d = 1$, sappiamo già di poter scrivere $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ dove $\mathrm{gr}(Q_1) \geq \mathrm{gr}(P_1) + 2$. Ora,

$$\int_{\gamma_n} h_j(z) \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = a \int_{\gamma_n} \frac{h_j(z)}{z}\, dz + \int_{\gamma_n} h_j(z) \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}\, dz\,.$$

L'ultimo integrale tende a 0, come dimostrato sopra. Il penultimo integrale è nullo grazie al fatto che *l'integrale di una funzione pari su $\partial B(0,r)$ è sempre nullo*: infatti, per $p(z)$ pari si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,r)} p(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} p(re^{it}) rie^{it}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} p(re^{it}) rie^{it}\, dt + \int_0^{\pi} p(re^{i(t+\pi)}) rie^{i(t+\pi)}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} p(re^{it}) rie^{it}\, dt + \int_0^{\pi} p(-re^{it}) ri(-1)e^{it}\, dt = 0\,.
\end{aligned}$$

(Il fatto che il penultimo integrale sia nullo poteva essere dimostrato anche usando il teorema dei residui: la somma dei residui di una funzione pari in un dominio simmetrico è zero.)
*Fine dimostrazione lemma.*

Per terminare, sia $n \in \mathbf{N}$ sufficientemente grande in modo che $Q^{-1}(0) \subset B(0, n + \frac{1}{2})$. Per il teorema dei residui

$$\int_{\gamma_n} h_j(z) \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \left[ \sum_{Q(w)=0} \mathrm{Res}\big(h_j \tfrac{P}{Q}, w\big) + \sum_{\substack{k=-n \\ Q(k)\neq 0}}^{n} \mathrm{Res}\big(h_j \tfrac{P}{Q}, k\big) \right]\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ e usando il nostro Lemma e (3), otteniamo le seguenti due formule:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ Q(k)\neq 0}}^{+\infty} \frac{P(k)}{Q(k)} = - \sum_{Q(w)=0} \mathrm{Res}\big(h_1(z) \tfrac{P(z)}{Q(z)}, w\big)\,,$$

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ Q(k)\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \frac{P(k)}{Q(k)} = - \sum_{Q(w)=0} \mathrm{Res}\big(h_2(z) \tfrac{P(z)}{Q(z)}, w\big)\,.$$

**Esempi di applicazioni.**

1) $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} - 1 \right)$$
$$= -\frac{1}{2} \mathrm{Res}\big(\tfrac{\pi \cos(\pi z)}{(z^2+1)\sin(\pi z)}, i\big) - \frac{1}{2} \mathrm{Res}\big(\tfrac{\pi \cos(\pi z)}{(z^2+1)\sin(\pi z)}, -i\big) - \frac{1}{2} = \ldots$$

2) $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2m}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2m}} = -\frac{1}{2} \mathrm{Res}\big(\tfrac{\pi}{z^{2m} \sin(\pi z)}, 0\big) = \ldots$$