Analisi Matematica 3
(corso della prof. *E. Terraneo*, L.T. in Fisica)
Registro delle esercitazioni (inclusi gli esercizi proposti)

L. Vesely, 2019–2020

02/10/2019 [2 ore: n. 1,2]

Curve e integrali curvilinei - una "infarinatura"

- Curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$(c.p.); c.p. chiusa; c.p. semplice. Sostegno di una c.p..
- C.p. regolare; c.p. regolare a tratti.
- Esempi.
- Cambiamento di variabile (camb.var.); camb.var ammissibile; camb.var. ammissibile crescente.
- *Notazione.* Siano $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\psi\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ due c.p..
  $\varphi \approx \psi$ significa che esiste un camb.var. che leghi φ, ψ.
  Se φ, ψ sono regolari:
  (a) $\varphi \sim \psi$ significa che esiste un camb.var. ammissibile che leghi φ, ψ;
  (b) $\varphi \overset{\circ}{\sim} \psi$ significa che esiste un camb.var. ammissibile crescente che leghi φ, ψ.
- La relazione $\approx$ è una relazione di equivalenza sulla famiglia delle curve parametrizzate. Chiameremo *curva* ogni classe di equivalenza rispetto a $\approx$. (Ed i suoi elementi vengono chiamate *parametrizzazioni* della curva.)
- Le relazioni $\sim$ e $\overset{\circ}{\sim}$ sono due relazioni di equivalenza sulla famiglia delle curve regolari. Chiameremo *curva regolare* ogni classe di equivalenza rispetto alla $\sim$; e chiameremo *curva regolare orientata* ogni classe di equivalenza rispetto alla $\overset{\circ}{\sim}$.

  Siccome un camb.var. ammissibile è crescente o decrescente, le parametrizzazioni di una curva regolare si decompongono in esattamente due curve regolari orientate. In altre parole, essa ha esattamente due orientamenti.

- Si vede facilmente che queste nozioni possono essere estese a curve regolari a tratti e curve orientate regolari a tratti.

- *Versore tangente* di una curva regolare in un punto "non estremo". *Versore normale* di una curva regolare piana.

- Lunghezza $\ell(\varphi)$ di una c.p.; curve rettificabili.

- **Osservazione.** Se $\varphi \approx \psi$ allora $\ell(\varphi) = \ell(\psi)$.

- **Proposizione.** *Sia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una c.p. L-lipschitziana (cioè, $\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| \le L|t_1 - t_2|$ per ogni $t_1, t_2 \in [a,b]$). Allora φ è rettificabile con $\ell(\varphi) \le L(b-a)$.*

- **Teorema.** *Sia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una c.p. di classe C^1 su $[a,b]$. Allora φ è rettificabile con*
$$\ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt\,.$$

- **Corollario.** *Se γ è una curva regolare (o regolare a tratti), allora la stessa formula vale per ogni parametrizzazione φ di γ.*

- **Integrale curvilineo su curve regolari (o regolari a tratti).**
Siano γ una curva regolare (o regolare a tratti) in $\mathbb{R}^n$, e $f\colon \langle\gamma\rangle \to \mathbb{R}$ una funzione continua (dove $\langle\gamma\rangle$ è il sostegno di γ). Definiamo *l'integrale di f su γ* come
$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\varphi(t))\, \|\varphi'(t)\|\, dt$$
dove $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi parametrizzazione di γ.
(Abbiamo verificato che la definizione non dipende dalla scelta di φ.)

09/10/2019 [2 ore: n. 3,4]

- **Esercizio per voi.** Stabilire se le seguenti curve in intersecano e, se sí, calcolare il relativo angolo:
$$\varphi(t) = \big(e^{2t}, 2e^t, t\big), \quad t \in [0,1];$$
$$\psi(t) = \Big(\tfrac{t^2+1}{2}, \tfrac{4t^{3/2}+2}{3}, 2t-2\Big), \quad t \in [0,1].$$
(Attenzione! Non è sufficiente porre $\varphi(t) = \psi(t)$. *Perché?*)

Funzioni implicite

- Mostrare che l'insieme degli zeri della funzione
$$f(x,y) = x^2 e^{-y} - 4ye^{-x^2}$$
coincide, in un intorno dell'origine, con il grafico di una funzione (di una variabile reale) di classe C^∞.

- Sia $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2x + y$. Verificare che in un intorno di $(0,0)$ lquazione
$$f(x,y) = 0$$
definisce implicitamente un'unica funzione $y = \varphi(x)$ di classe C^∞. Determinare poi lo sviluppo di McLaurin di φ, centrato in $x_0 = 0$, arrestato al terzo ordine, con il resto secondo Peano.

- *Uno studio globale.*
Effettuare lo studio globale dell'insieme degli zeri della funzione f dell'esercizio precedente.

Svolgimento.
Esistenza dell'implicita. Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono
$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2\,, \quad f_y(x,y) = 3y^2 + 1\,.$$
Essendo $f_y > 0$ dappertutto, la funzione f è "strettamente crescente nella variabile y", cioè:
per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, la funzione $f(x,\cdot)$ è strettamente crescente.
Inoltre, sempre per x fissato,
$$\lim_{y\to\pm\infty} f(x,y) = \pm\infty$$
e quindi $f(x,y) > 0$ per ogni sufficientemente grande y, e $f(x,y) < 0$ per ogni sufficientemente piccolo y. Per la monotonia in y e per il teorema degli zeri, esiste un unico $y =: \varphi(x)$ tale che $f(x,y) = 0$. Abbiamo così mostrato che l'insieme degli zeri di f coincide con il grafico di una funzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.
Regolarità di φ. Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Siccome $f(\bar{x},\varphi(\bar{x})) = 0$, possiamo applicare il teorema del Dini al punto $(\bar{x},\varphi(\bar{x}))$ per ottenere che, in un intorno di tale punto, l'equazione $f = 0$ definisce un'unica funzione di classe C^∞; e tale funzione deve necessariamente coincidere con la nostra φ. Ciò dimostra che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Le prime osservazioni. Abbiamo $\varphi(0) = 0$. Inoltre, siccome f è dispari (come funzione di (x,y)), abbiamo $0 = -f(x,\varphi(x)) = f(-x,-\varphi(x))$ e quindi $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ per ogni x; in altre parole, φ è dispari!

Segno. Notiamo che

$$f(x,0) = x^3 - 2x \begin{cases} = 0 & \text{se } x \in \{0, \pm\sqrt{2}\}, \\ > 0 & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty), \\ < 0 & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}). \end{cases}$$

Tenendo in mente la monotonia di f in y, ne segue che $\varphi = 0$ nei punti $0, \pm\sqrt{2}$, $\varphi > 0$ negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$, e $\varphi < 0$ altrimenti.

Monotonia e estremanti. Dal teorema del Dini sappiamo che

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = \frac{2 - 3x^2}{3\varphi(x)^2 + 1},$$

da cui: φ è strettamente crescente su $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, e strettamente decrescente su ciascuno dei due intervalli rimanenti. Inoltre, i punti $\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ sono rispettivamente un punto di massimo e un punto di minimo, almeno relativi.

Limiti. Per $a \in \mathbb{R}$ (fissato), abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, a) = +\infty$$

e quindi $f(x, a) > 0$ definitivamente per $x \to +\infty$. Di conseguenza, $\varphi(x) < a$ definitivamente. Per l'arbitrarietà di a, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Essendo φ dispari, $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$.

Asintoti. Per $m \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x, mx) &= \lim_{x \to +\infty} \big((1 + m^3)x^3 + (m - 2)x\big) \\ &= \begin{cases} +\infty, & m > -1, \\ -\infty, & m \le -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Con ragionamenti analoghi a quelli già fatti, otteniamo: $\varphi(x) < mx$ definitivamente se $m > -1$, e $\varphi(x) > mx$ definitivamente se $m \le -1$. Sia ora $\varepsilon > 0$. Considerando $m = -1 + \varepsilon$ e $m = -1 - \varepsilon$, ne segue che

$$-1 - \varepsilon < \tfrac{\varphi(x)}{x} < -1 + \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Ciò dimostra che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = -1$ è il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto.

Ora, per $q \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, -x + q) = \lim_{x \to +\infty} (3qx^2 + o(x^2)) = q \cdot (+\infty) \quad \text{per } q \neq 0.$$

Da ciò si deduce che $\varphi(x) < -x + q$ definitivamente. Dall'arbitrarietà di q abbiamo (fate tutto il ragionamento!) che $\lim_{x \to +\infty}(\varphi(x) + x) =$

0. Concludiamo che $y = -x$ è l'asintoto obliquo al grafico di φ per $x \to +\infty$. Inoltre, per $m = -1$ abbiamo visto sopra che $\varphi(x) > -x$ definitivamente, cioè, φ sta (per x grandi) al di sopra dell'asintoto. Per simmetria, $y = -x$ è l'as. obliquo anche per $x \to -\infty$ e φ sta al di sotto dell'asintoto vicino a $-\infty$.

- **Esercizio per voi.** Verificare che in un intorno di $(2, -2)$ l'equazione
$$\sin(x + y) - xy - 4 = 0$$
definisce implicitamente un'unica funzione $y = \varphi(x)$ di classe C^∞. Determinare poi lo sviluppo di Taylor di φ, centrato in $x_0 = 2$, arrestato al II ordine (resto secondo Peano).

- *Esercizio che faremo la prossima volta.* Studiare l'insieme degli zeri della funzione
$$F(x, y) = \sqrt{1 - xy} - e^{x+y} \quad \text{con } x \geq 0.$$

16/10/2019 [2 ore: n. 5,6]

- Studiare l'insieme degli zeri della funzione
$$F(x, y) = \sqrt{1 - xy} - e^{x+y} \qquad \text{con } x \geq 0.$$
Commento. Abbiamo calcolato la derivata destra in 0 dell'implicita usando la definizione. In alternativa si potrebbe sfruttare il fatto che F è definita e C^∞ anche in tutto un intorno di $(0, 0)$ e che vi soddisfa le ipotesi del teorema di Dini.

- **Esercizio per voi.** $F(x, y) = \log(xy) + \sqrt{y} - x$.
  (a) Dimostrare che l'insieme degli zeri di F coincide con il grafico di una funzione $y = g(x)$ di classe C^∞ (sul suo insieme di definizione).
  (b) Studiare la funzione g (senza convessità).
  (c) *Facoltativo.* Stabilire se la funzione $\varphi(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ è integrabile (nel senso dell'integrale improprio di Riemann) su $[1, +\infty)$.

- Stabilire quante soluzioni della forma $z = g(x, y)$ sono definite implicitamente dall'equazione
$$x^3 - 4y^5 + 2z \sin(xy) + \mathrm{Sh}(z^2 - 4) + 4 = 0$$
in un intorno di $(0, 1)$. Per ciascuna tale implicita g, scrivere poi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(0, 1, g(0, 1))$.

- **Esercizio per voi (non proposto in aula).** Verificare che l'insieme degli zeri della funzione
$$f(x,y,z) = e^{x+y-z} - \cos(x+y+z)$$
in un intorno di $(0,0,0)$ coincide con il grafico di una funzione $y = \varphi(x,z)$. Determinare poi lo sviluppo di Taylor di φ centrato in $(0,0)$ e arrestato al secondo ordine (resto di Peano).

- Data
$$F(x,y,z,w) = \big(x^2 + y^2 + z^2 + 2we^x - 3\,,\, xe^z + ye^w - z + w\big),$$
mostrare che l'insieme
$$E = \big\{\, (x,y,z,w) : F(x,y,z,w) = (0,0) \,\big\}$$
(quindi l'insieme delle soluzioni di due equazioni in quattro incognite) coincide, in un intorno di $(0,0,1,1)$, con un'unica funzione implicita (vettoriale!) $(z,w) = \varphi(x,y)$, e calcolarne poi la matrice Jacobiana in $(0,0)$.

30/10/2019 [2 ore: n. 7,8]

- Mostrare che il sistema
$$\begin{cases} y^2 - x^2 + z^2 = 1 \\ yz + xz - xy - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$
definisce implicitamente due funzioni $x = \varphi_1(y)$ e $z = \varphi_2(y)$ in un intorno del punto $(1,1,1)$. Calcolare poi $\varphi_i'(1)$, $i = 1,2$.

- Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \big(x\cos y, x\sin y\big), \quad (x,y) \in \Omega := (0,+\infty) \times (0,3\pi).$$
Dimostrare che f è un diffeomorfismo locale; determinare $f(\Omega)$ e stabilire poi se f è anche un diffeomorfismo globale tra Ω e $f(\Omega)$.
Determinare $f(\widetilde{\Omega})$ dove $\widetilde{\Omega} = (0,+\infty) \times (0,2\pi)$, e stabilire se f è un diffeomorfismo globale su $\widetilde{\Omega}$.

Estremi vincolati

- *Ripasso* del teorema sui moltiplicatori di Lagrange.

- Determinare gli estremanti assoluti della funzione
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$$
vincolata agli insiemi
(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
[fatto in due modi: 1) molt. di Lagrange; 2) parametrizz. di ∂A]
(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

- Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 y$ sull'insieme
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 - \arctan x = 0\}.$$
Procedendo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene un unico candidato per essere estremante: $(0,0)$. Ma studiando la funzione $x \mapsto f(x, (\arctan x)^{1/3}) = x^2(\arctan x)^{1/3}$ (di una sola variabile) si scopre che essa è strettamente monotona, e quindi non ha estremanti.
Questo esempio mostra che il metodo dei moltiplicatori di L. è solo una condizione necessaria, ma in generale non sufficiente, affinché si abbia un estremante.

06/11/2019 [2 ore: n. 9,10]

- Studiare gli eventuali estremanti (assoluti e/o relativi) di
$$f(x,y,z) = x^2 + \cos y$$
su $\Gamma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10\}$.

- Studiare gli eventuali estremanti assoluti di
$$f(x,y,z) = xy$$
su ciascuno dei seguenti insiemi:
$$\Gamma = \{(x,y,z) : x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\},$$
$$A = \{(x,y,z) : x + y + z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- *Ripasso.* Forme differenziali lineari: forme esatte, forme chiuse, integrale lungo una curva. La loro corrispondenza con campi vettoriali (irrotazionali, conservativi).

- Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia
$$\omega_a = (x^4 + aze^z)\,dx - y^6\,dy + e^z\,dz\,.$$
(a) Per quali a la forma ω_a è esatta in $\mathbb{R}^3$?

(b) Per tali a, calcolare $\int_\gamma \omega_a$ dove

$$\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^4 t, t)\,, \quad t \in [0, 4\pi].$$

(c) Calcolare l'integrale di

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

lungo la curva di equazione $x^2 + y^2 - 2(x+y) = 7$, percorsa una volta in senso antiorario.

13/11/2019 [2 ore: n. 11,12]

- Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ tale che la forma differenziale

  $$\omega = \big(yz^2 - g(y) + 1\big)dx + \big(xz^2 - 2x + 3z\big)dy + \big(xzg(y) + 3y\big)dz$$

  sia esatta in $\mathbb{R}^3$. Determinare tali funzioni g e calcolare i relativi potenziali di ω.

- Sia $\quad \omega = \dfrac{y^2}{x^2+y^4}\,dx - \dfrac{2xy}{x^2+y^4}\,dy\,.$
  (a) ω è esatta in $A = \{(x,y) : x > 0\}$?
  (b) In caso affermativo, calcolare i relativi potenziali di ω su A.
  (c) ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

- Dimostrare che l'equazione

  $$y + 2x\left(\tfrac{\pi}{2} + \arctan x\right) + \sqrt[3]{y} = 0$$

  definisce implicitamente un'unica funzione $y = \varphi(x)$. Studiare la funzione φ, tracciandone un grafico qualitativo.

04/12/2019 [2 ore: n. 13,14]

- Ripasso: integrale di Lebesgue e quello di Riemann (eventualmente improprio).

- *Teorema.* Una funzione limitata $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se e solo se è continua in q.o. punto di $[a,b]$.

  Corollario. Una funzione limitata su $[a,b]$ che ha solo un numero al più numerabile di discontinuità è Riemann–integrabile.

- Sia $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(x^{4/3} + 3x^{1/3}) \log(x+2)}$.
  Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha $f \in L(a, +\infty)$?

- **Esercizio per voi.** Sia $f(x) = \dfrac{\arctan(ax)}{|x|^a}$.
  Per quali $a > 0$ si ha $f \in L(\mathbb{R})$?

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(nx)}{1+x}\, dx$

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\arctan(x/n)}{x^7\,(1+\sqrt{n}\,)^8}\, dx$

- $\displaystyle \lim_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt[4]{x^4+k^4}}\, dx$

- $\displaystyle \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4^n x^2} \right) dx$

- **Esercizio (teorico) per voi.** Dimostrare il seguente
  Teorema. Siano $f_n \in L(E)$ $(n \in \mathbb{N})$ tali che
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_n| \right) < +\infty.$$
  Allora:
  (a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente per q.o. $x \in E$;
  (b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L(E)$;
  (c) $\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E f_n\right)$.

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 \frac{\sin(1+(x/n))}{x+n}\, dx$

11/12/2019 [2 ore: n. 15,16]

- *Ripasso* – teoremi di Tonelli e Fubini.

- $\displaystyle \int_D y \sin|y^2 - x|\, dxdy$ dove $D = [0,1] \times [0,2]$.

- Il cambio di variabile in $\mathbb{R}$ come motivazione per il caso di più dimensioni.
- *Teorema del cambio di variabile negli integrali di Lebesgue in* $\mathbb{R}^n$ – enunciato.
- Coordinate polari nel piano.
- $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ dove D è un semicerchio di raggio $R>0$ centrato nell'origine.
- **Un esempio importante.** $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (calcolato passando attraverso integrali doppi).

18/12/2019 [2 ore: n. 17,18]

- *Definizione.* Dato un insieme misurabile e limitato $E \subset \mathbb{R}^n$, il *baricentro* di E è il punto $\underline{\mathrm{b}} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ (non necessariamente appartenente ad E), dato da
$$b_j = \frac{1}{m(E)} \int_E x_j \, d\underline{\mathrm{x}}\,.$$
Calcolare il baricentro dell'insieme
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{3} + y^2 \le 1,\ y \ge x \right\}.$$
[Abbiamo usato le *coordinate ellittiche*. Attenzione: il significato di θ non è poi quello dell'angolo!]
- Calcolare la misura dell'insieme
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x}{2} < y < 2x,\ \frac{1}{x} < y < \frac{3}{x} \right\}.$$
[Se $(x,y) \in D$ allora $x>0, y>0$. Abbiamo utilizzato il cambiamento di variabile $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$.]
- $\displaystyle\int_E z\, dxdydz$ dove $E = \{(x,y,z) :\ x,y,z>0,\ x+y+z<1\}$. Integrare sia per fili verticali sia per strati orizzontali.

- Per quali $a > 0$ la funzione
$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+9z^2}$$
è sommabile sull'insieme
$$E_a = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 0,\ 1 < x^2+y^2 < z^a\big\}\ ?$$
[Coordinate cilindriche.]

- Introduzione alle coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$.

14/01/2020 [2 ore: n. 19,20]

- *Ripasso.* Dominio regolare, classe $C^1(D)$. Teoremi di Gauss-Green nel piano.

- Calcolo delle aree usando i teoremi di Gauss-Green:
$$m_2(D) = \int_D 1\,dxdy \begin{cases} = \int_{+\partial D} x\,dy \\ = -\int_{+\partial D} y\,dx \\ = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} xdy - ydx \\ = \int_{+\partial D} axdy - bydx \qquad (a+b=1). \end{cases}$$
Esempio. Sia $r\colon [0,2\pi] \to (0,+\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che $r(0) = r(2\pi)$. La curva parametrizzata
$$\varphi(t) = \big(r(t)\cos t, r(t)\sin t\big), \quad t \in [0,2\pi],$$
è una curva chiusa semplice (in $\mathbb{R}^2$) che racchiude un dominio D. Allora
$$m_2(D) = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt\,.$$

- Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio di raggio 1, centrato in $(0,1)$. Calcolare
$$\int_{+\partial D} y^2\,dx + x\,dy\,.$$
(Stokes nel piano)

- Calcolare l'integrale di superficie
$$\int_{\partial V} y\,d\sigma$$
dove $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le 2+y\}$.

- Calcolare il flusso del campo vettoriale
$$F(x,y,z) = \left(xy, yz^2, xe^{-y^2}\right)$$
uscente dalla frontiera di
$$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$
Calcolare poi il flusso uscente dalla parte di ∂E contenuta sulla sfera.

- **Esercizio per voi.** Sia γ la curva data da
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = y \end{cases}$$
percorsa in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto in $(0,0,5)$. Calcolare
$$\int_\gamma (y+2x)dx + (2z-x)dy + (2x+3y)dz\,,$$
sia direttamente sia utilizzando il Teorema di Stokes.