Alcune sostituzioni utili
nella ricerca di primitive
(L.V.)

In ciò che segue, R denota una funzione razionale (cioè rapporto di due polinomi) in una o più variabili, P è un polinomio. (Per esempio, la funzione $P(x,y) = x^3y - 2x + 5xy^3 + 12$ è un polinomio in due variabili di grado 4.)

Le sostituzioni segnate con "•" sono considerate basilari e vanno imparate.

- $\int R(a^x)\, dx$ $(0 < a \neq 0)$.
  Sostituzione $a^x = t$.
  Esempio: $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$.

- $\int R(\sqrt[q]{x})\, dx$.
  Sostituzione $\sqrt[q]{x} = t$.
  Anche $\int R(x^{p_1/q_1}, \dots, x^{p_k/q_k})\, dx$ (p_i, q_i interi) rientra in questo tipo: si osservi che x^{p_i/q_i} è una potenza di $\sqrt[q]{x}$ dove q è il minor comune multiplo dei numeri $q_1, \dots, q_k$.
  Esempi: $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$, $\int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x}+3}\, dx$.

- $\int R(\tan x)\, dx$, $\int P(\log x)\, dx$.
  Sostituzione: indovinatela!
  Esempi: $\int (\log^2 x - \log x - 7)\, dx$, $\int \tan^3 x\, dx$.

◦ $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x, \tan x, \cot x)\, dx$.
  Sostituzione $\tan x = s$. Se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, si ha $x = \arctan s$, per cui:
  $dx = \frac{1}{s^2+1}\, ds$,
  $\cos^2 x = \frac{1}{s^2+1}$ (segue da $s^2 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$), da cui: $\sin^2 x = \frac{s^2}{s^2+1}$,
  $\sin x \cos x = \tan x \cdot \cos^2 x = \frac{s}{s^2+1}$, $\cot x = \frac{1}{s}$.
  Questa sostituzione di solito risulta più semplice della seguente sostituzione "universale".
  Esempio: $\int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

- $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$.
  Sostituzione $\tan \frac{x}{2} = t$. Se $x \in (-\pi, \pi)$, si ha $x = 2\arctan t$, per cui (usando il caso precedente):
  $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$,
  $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\qquad \cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
  Esempio: $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$.

◦ $\int R\left(\sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$.
  Sostituzione $\sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

Inoltre, le primitive $\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx$ possono essere trattate come nel secondo punto sopra.

- $\int x^{2k+1} R\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)\, dx\,,\quad \int x^{2k+1} R\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\, dx\,,\quad \int x^{2k+1} R\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)\, dx.$
  Sicuramente troverete da soli come trasformare questi integrali (e, più in generale, quelli del tipo $\int x\, R(x^2, \sqrt{a^2-x^2})\, dx$) in integrali di funzioni razionali.
  Esempio: $\int x^3\sqrt{2x^2+3}\, dx$.

- $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\, dx\,,\qquad \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\, dx\,,\qquad \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)\, dx.$
  È possibile sfruttare le ben note relazioni $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ e $\mathrm{Ch}^2(t) - \mathrm{Sh}^2(t) = 1$, sostituendo rispettivamente $x = a\sin t$, $x = a\,\mathrm{Ch}(t)$, $x = a\,\mathrm{Sh}(t)$.
  Esempi: $\int\sqrt{1-x^2}\, dx$, $\int(2+x^2)^{3/2}\, dx$, $\int x^2\sqrt{x^2-4}\, dx$.

- $\int R\left(x, \sqrt{\pm(x^2+px+q)}\right)\, dx.$
  Osservando che $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})$, possiamo operare la sostituzione $x+\frac{p}{2} = t$ per ricondurci al caso precedente.
  Esempi: $\int\sqrt{x^2+2x+2}\, dx$, $\int(x^2+3)\sqrt{3-4x-4x^2}\, dx$.

- $\int x^m(a+bx^n)^p\, dx$ dove m, n, p sono *razionali* (*"integrale binomio"*).
  a) Se p è intero, si tratta di una funzione razionale in x^m e x^n; perciò, se $m = \frac{m_1}{m_2}$, $n = \frac{n_1}{n_2}$ (m_i, n_i interi), basta porre $x^{1/q} = t$ dove q è il minore comune multiplo di m_2, n_2.
  b) Se $\frac{m+1}{n}$ è intero e $p = \frac{r}{s}$ (r, s interi), la sostituzione $(a+bx^n)^{1/s} = t$ conduce alla ricerca di primitiva di una funzione razionale.
  Esempio: $\int\frac{(1-2\sqrt{x})^{3/7}}{x\sqrt{x}}\, dx$.
  c) Se non siamo nel caso b), possiamo provare a ricondurre il problema al caso b) facendo sostituzione $x = 1/t$. È facile far vedere che questo è possibile se e solo se $\frac{m+1}{n} + p$ è intero.
  Esempio: $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[4]{x^3}}\, dx$.

— — —

Per poter utilizzare le sostituzioni trattate sopra, bisogna saper integrare le funzioni razionali (v. le esercitazioni del corso). L'argomento è anche trattato su moltissimi libri; ne indichiamo soltanto alcuni.

- V. E. Bononcini, *Esercizi di Analisi Matematica, vol. 2*, pp. 196–200.
- F. Buzzetti, E. Grassini Raffaglio & A. Vasconi Ajroldi, *Esercizi di Analisi Matematica I, parte seconda*, pp. 31–33, 36–37.
- L. De Biase, R. Fumagalli & C. Zanco, *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, pp. 280–290.
- B. P. Demidovič, *Esercizi e Problemi di Analisi Matematica*, pp. 117–122.
- P. Marcellini & C. Sbordone, *Analisi Matematica uno*, pp. 329–334 (solo il caso di denominatore quadratico).