CONTENUTO INDICATIVO DELLE LEZIONI SVOLTE
Analisi Funzionale I , 2004-2005, L. Vesely – C. Zanco

29.09.2004 (LV)

- Introduzione del corso, questioni organizzative.
- Definizione di uno spazio normato, spazi di Banach.
- Notazioni: B_X, S_X, $B(x,r)$, $B^0(x,r)$, $S(x,r)$; $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

Teorema. *Uno spazio normato X è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente di elementi di X converge in X.*

Teorema. *Siano X, Y due spazi normati e $T: X \to Y$ un'applicazione lineare.*
1. *Sono equivalenti:*
(i) T *è continua;*
(ii) T *è continua in* 0;
(iii) $T(V)$ *è limitato per qualche intorno* V *di* 0;
(iv) $T(B_X)$ *è limitato;*
(v) $\|T\| := \sup_{x \in B_X} \|Tx\| < +\infty$.
2. *Se* $T(X)$ *è finito dimensionale, allora sono equivalenti:*
(i) T *è continua;*
(ii) $\mathrm{Ker}(T) := T^{-1}(0)$ *è chiuso;*
(iii) $\mathrm{Ker}(T)$ *non è denso.*
3. *Se X è finito dimensionale, allora T è continua.*

Definizione. $\mathcal{L}(X,Y) = \{T: X \to Y : T \text{ lineare e cont.}\}$.

Teorema. *$\mathcal{L}(X,Y)$, con la norma definita nel teorema precedente, è uno spazio normato. Se Y è di Banach, lo è anche $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Definizione. $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbf{K})$ (il *duale* [topologico] di X) – è uno spazio di Banach.
$X^\sharp = \{f: X \to \mathbf{K} : f \text{ lineare}\}$ (il *duale algebrico* di X).

Teorema. *$X^* = X^\sharp$ se e solo se X è finito dimensionale.*

8.10.2004 (LV)

- Spazi di successioni c_0, c, ℓ_p $(1 \le p \le +\infty)$.
  Spazi di funzioni $C(K)$, $B(\Gamma) = \ell_\infty(\Gamma)$.
- Sono separabili: c_0, c, ℓ_p $(1 \le p < +\infty)$, $C(K)$ (K metrizzabile).
  $\ell_\infty(\Gamma)$ è separabile se e solo se Γ è finito.
- I duali.
  La formula $f(x) = \sum_n x_n y_n$ definisce un'isometria fra i funzionali continui f e le successioni $y = (y_n)$ nei seguenti casi:
  $c_0^* = \ell_1$, $\ell_1^* = \ell_\infty$.
  La formula $f(x) = (\lim x) y_0 + \sum_n x_n y_n$ definisce un'isometria nel caso di $c^* = \ell_1$.

15.10.2004 (LV)

- $\ell_p^* = \ell_q$ $(1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

- $L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$.
  $L_p[0,1]$ sono separabili per $1 \leq p < +\infty$; $L_\infty[0,1]$ non è separabile.
  $L_p[0,1]^* = L_q[0,1]$ dove l'isometria è data da $f(x) = \int_\Omega x \cdot y \, d\mu$.
  $L_1[0,1]^* = L_\infty[0,1]$ se μ è σ-finita (ma non in generale).

- Il duale di $C(K)$ come misure di Radon a valori in $\mathbf{K}$. Nel caso di $K = [a,b]$, il duale di $C[a,b]$ può essere descritto usando le funzioni a variazione limitata. [Riesz]

20.10.2004 (CZ)

- Uno spazio metrico è compatto se e solo se è compatto per successioni se e solo se è pre-compatto e completo.

- Categorie di Baire in spazi topologici. Spazi di Baire. Uno spazio di Baire è di II categoria in sè; uno spazio normato di II categoria in sè è di Baire.

Teorema (Baire). *Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire; ogni spazio topologico di Hausdorff localmente compatto è uno spazio di Baire.*

(N.B. Esistono spazi metrici localmente compatti non completi!)

22.10.2004 (CZ)

- Alcune conseguenze del teorema di Baire in Analisi reale: l'insieme dei razionali di $\mathbf{R}$ non è un G_δ (dunque non esistono funzioni reali continue esattamente sui razionali), spazi metrici completi numerabili possiedono punti isolati, il sottospazio di $C[a,b]$ costituito dalle funzioni che ammettono almeno una derivata laterale in almeno un punto di $[a,b]$ è di I categoria in $C[a,b]$ (rispetto alla topologia della convergenza uniforme), ogni sottoinsieme di $\mathbf{R}$ è esprimibile come unione di un insieme di I categoria e di un insieme di Lebesgue-misura nulla.

- Codimensione di un sottospazio di uno spazio lineare; basi algebriche e basi di Schauder negli spazi normati; enunciato del teorema della mappa aperta.

- Immersioni continue fra spazi ℓ_p e fra spazi $L_p(\mu)$ (μ misura finita).

- Alcune conseguenze del teorema di Baire in Analisi funzionale: nessuno spazio di Banach ammette basi algebriche esattamente numerabili, sottospazi chiusi di spazi di Banach non hanno codimensione esattamente numerabile, per $1 \leq r < s$ le immersioni di ℓ_r in ℓ_s e di $L_s(\mu)$ in $L_r(\mu)$ (μ misura finita) sono di I categoria.

27.10.2004 (CZ)

- Interno algebrico di un sottoinsieme di uno spazio lineare. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach ha interno topologico non vuoto se e solo se ha interno algebrico non vuoto. Controesempi relativi a spazi normati di I categoria in sè o a sottoinsiemi non chiusi.

- Semicontinuità inferiore e superiore di funzioni reali: definizioni, motivazioni, applicazioni, esempi.

29.10.2004 (CZ)

- **Teorema di Banach-Steinhaus (o principio di uniforme limitatezza)**.
  Contro-esempio relativo alla necessità di assumere che lo spazio di partenza degli operatori sia di II categoria in sè.

- Prime conseguenze del teorema di Banach-Steinhaus.

Teorema. *Sia $\{T_n\}$ una successione di operatori lineari limitati da uno spazio di Banach in uno spazio normato, puntualmente convergente ad un operatore T. Allora anche T è lineare limitato e $\|T\| \le \liminf_n \|T_n\|$. Inoltre la convergenza è uniforme sui pre-compatti (in generale non su tutti i limitati).*

- Richiami su varietà lineari massimali e insiemi di livello di funzionali lineari.

03.11.2004 (LV)

- Osservazioni geometriche:
  1) sottospazi di codimensione 1 come nuclei di funzionali lineari non banali;
  2) iperpiani (cioè traslati di sottospazi di codim. 1) come insiemi di livello di funzionali lineari non banali;
  3) negli spazi reali, l'iperpiano $f^{-1}(\alpha)$ separa i due semizpazi $H_+ = \{x : f(x) > \alpha\}$ e $H_- = \{x : f(x) < \alpha\}$.
- Formula di Ascoli: $\mathrm{dist}\big(x_0, f^{-1}(\alpha)\big) = \frac{|f(x_0)-\alpha|}{\|f\|}$ $\quad (f \in X^* \setminus \{0\})$.
- Estendibilità di mappe lineari continue a valori in uno spazio di Banach da un sottospazio alla chiusura del sottospazio. Corollario: il duale di X coincide con il duale del completamento di X.
- Cenni sull'Assioma della scelta e Lemma di Zorn.
- Teorema di Hahn–Banach: forma algebrica reale.

05.11.2004 (LV)

- Teorema di Bohnenblust–Sobczyk: forma generale del teorema algebrico di Hahn–Banach.
- Forma analitica del teorema di H.–B.: estensione di funzionali lineari continui preservando la loro norma.
- Corollari al Teorema di H.–B.: gli elementi del duale separano i punti dello spazio; la norma degli elementi dello spazio può essere calcolata usando elementi del duale; se $x_0 \in X \setminus \overline{M}$, allora esiste $f \in S_{X^*}$ con $f = 0$ su M e $f(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, M)$.
- Immersione canonica $J\colon x \mapsto \hat{x}$ di X nel suo secondo duale.
- Commenti su **estensioni di operatori lineari**:
  Siano, X, Y due spazi normati, $M \subset X$ sottospazio, $T_0 \in \mathcal{L}(M, Y)$.
  1. *Se $Y = \ell_\infty(\Gamma)$, allora T_0 ammette un'estensione $T \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty(\Gamma))$ con $\|T\| = \|T_0\|$.*
  2. [Veech, 1971] *Se $Y = c_0$ e X* è separabile, *allora T_0 ammette un'estensione $T \in \mathcal{L}(X, c_0)$ con* $\|T\| \le 2\|T_0\|$. (L'ipotesi di separabilità non può essere omessa: $X = \ell_\infty$, $M = Y = c_0$, T_0 =identità [Phillips–Sobczyk].)
  3. *Sia X uno spazio di Hilbert. Se Y è di Banach (oppure Y è normato e M è chiuso), allora T_0 ammette un'estensione $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ con $\|T\| = \|T_0\|$.*

10.11.2004 (LV)

- M sottospazio di X. Allora valgono le seguenti implicazioni: $\begin{array}{ccc} X \text{ separabile} & \Leftarrow & X^* \text{ separabile} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M \text{ separabile} & \Leftarrow & M^* \text{ separabile} \end{array}$.
- Un sottospazio $M \subset X$ è denso se e solo se $M^\perp := \{f \in X^* : f \equiv 0 \text{ su } M\} = \{0\}$.
- Lemma di Riesz sull'esistenza di elementi "quasi perpendicolari"; la non compattezza di B_X se $\dim(X) = \infty$.
- Ogni sottospazio $M \subset X$ di dimensione finita è complementato, cioè esiste una proiezione lineare continua suriettiva $P\colon X \to M$.

- X normato, $C \subset X$ convesso, $0 \in \mathrm{int}(C)$. Allora il *funzionale di Minkowski* $p_C\colon X \to [0,+\infty)$, dato da
  $p_C(x) = \inf\{t > 0 : x \in tC\}$,
  ha le seguenti proprietà:
  a) $p_C = p_{\overline{C}}$;
  b) p_C è sublineare;
  p_C è una seminorma $\Leftrightarrow$ $\overline{C}$ è simmetrico;
  p_C è una norma equivalente $\Leftrightarrow$ $\overline{C}$ è simmetrico e limitato;
  c) $|p_C(x) - p_C(y)| \leq (1/\rho)\|x-y\|$ $(x, y \in X)$ se $B(0,\rho) \subset C$;
  d) $\mathrm{int}(C) = \{x : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x : p_C(x) \leq 1\} = \overline{C}$.

12.11.2004 (LV)

Lemma. *Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di uno spazio normato X.*
1) Sempre vale $A + A \supset 2A$. Se A è convesso, allora $A + A = 2A$.
2) A, B convessi $\Rightarrow$ A convesso.
3) A aperto $\Rightarrow$ $A + B$ aperto.
4) A, B chiusi $\not\Rightarrow$ $A + B$ chiuso.
5) A compatto, B chiuso $\Rightarrow$ $A + B$ chiuso.

Teorema (Hahn–Banach, forma geometrica). *Siano A, B due sottinsiemi convessi disgiunti non vuoti di uno spazio normato X. Se A è aperto, allora A, B possono essere strettamente separati con un iperpiano chiuso.*

Esercizio. *X normato, $f \in X^* \setminus \{0\}$, $A \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $f(A)$ aperto.*

Corollario. *Siano A, B due sottinsiemi convessi disgiunti non vuoti di uno spazio normato X.*
1. *Se $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$, allora A, B possono essere separati con un iperpiano chiuso.*
2. *Se A è compatto e B è chiuso, A, B possono essere fortemente separati con un iperpiano chiuso.*

- Altri corollari: ogni insieme convesso chiuso è intersezione dei semispazi chiusi che lo contengono; per ogni punto di frontiera di un insieme convesso avente punti interni passa un iperpiano di supporto; il duale di uno spazio infinito dimensionale è infinito dimensionale.
- *Banach limits ("limiti di successioni non convergenti")*: esistono funzionali $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ tali che:
  a) se $\{x_n\}$ converge, allora $\Lambda(\{x_n\}) = \lim x_n$;
  b) se $x_n \geq 0$ per ogni n, allora $\Lambda(\{x_n\}) \geq 0$;
  c) $\Lambda(\{x_{n+a}\}) = \Lambda(\{x_n\})$ per ogni $a \in \mathbf{N}$;
  d) $|x_n| \leq r$ per ogni n, allora $\bigl|\Lambda(\{x_n\})\bigr| \leq r$.

17.11.2004 (LV)

- insiemi convessi e combinazioni convesse; l'involucro convesso; il teorema di Carathéodory:
  se $\dim(X) = d$, *allora* $\mathrm{conv}(A)$ *è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di al più* $d+1$ *elementi di* A.
- $A \subset X$ compatto:
  a) se X ha dimensione finita, allora $\mathrm{conv}(A)$ è compatto;
  b) se X ha dimensione infinita, $\mathrm{conv}(A)$ può non essere chiuso;
  c) se X è di Banach, allora $\overline{\mathrm{conv}}(A)$ è compatto.
- Esempio di due sottoinsiemi (illimitati) chiusi disgiunti di ℓ_2 che non possono essere separati con un iperpiano chiuso.

19.11.2004 (LV)

Notazione. Per $x \in X$, $f \in X^*$ scriveremo: $\langle x, f\rangle = \langle f, x\rangle = f(x)$.

Definizione. X normato, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. Diciamo che $\{x_n\}$ *converge debolmente* a x se $f(x_n) \to f(x)$ per ogni $f \in X^*$.

- la convergenza forte implica quella debole, ma non vale il viceversa; in dimensione finita, e anche in ℓ_1 (teorema di Schur), una succesisone converge debolmente se e solo se converge fortemente.
- Proprietà delle successioni debolmente convergenti:
  a) $x_n \overset{w}{\to} x$, $f_n \to f \implies f_n(x_n) \to f(x)$;
  b) $x_n \overset{w}{\to} x \implies \{x_n\}$ è limitata;
  c) $x_n \overset{w}{\to} x \implies \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{conv}}\{x_n\}_{n\geq k} = \{x\}$ (e quindi: arbitrariamente vicino a x ci sono combinazioni convesse dei termini della successione $\{x_n\}$ aventi indici arbitrariamente grandi).

24.11.2004 (CZ)

Nozioni basilari sugli spazi vettoriali topologici.

- Concetti, definizioni e proprietà fondamentali. L'esempio della "core topology". Il concetto di limitatezza in senso lineare topologico.
- Spazi vettoriali topologici di dimensione finita n sono linearmente omeomorfi a $\mathbf{R^n}(\mathbf{C^n})$.
- Uno spazio vettoriale topologico è localmente compatto se e solo se è finito-dimensionale. Conseguenza: spazi vettoriali topologici localmente limitati con la proprietà di Heine-Borel sono finito-dimensionali.

26.11.2004 (CZ)

- Metrizzabilità di spazi vettoriali topologici. Osservazioni sui concetti di limitatezza e di successione di Cauchy nelle varie accezioni.
- Trasformazioni lineari limitate su spazi vettoriali topologici.
- Seminorme. Topologie localmente convesse e famiglie di seminorme compatibili, generazione di topologie localmente convesse mediante famiglie di seminorme. Metrizzabilità di spazi localmente convessi.
- Uno spazio vettoriale topologico è normabile se e solo se è localmente convesso e localmente limitato.

1.12.2004 (CZ)

- Un esempio di spazio localmente convesso non localmente limitato: lo spazio $C^{(0)}(\Omega)$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Il sottospazio delle funzioni olomorfe e la proprietà di Heine-Borel.
- Esempi di spazi localmente limitati non localmente convessi: gli spazi $L^p((0,1))$, $0 < p < 1$. Banalità del loro duale topologico.
- Spazi nè localmente convessi nè localmente limitati.

3.12.2004 (CZ)

- La topologia naturale (della convergenza puntuale) su spazi prodotto. Rigidità delle topologie compatte di Hausdorff.
- La topologia meno fine che rende continue le funzioni di una famiglia assegnata. Topologia generata su uno spazio lineare da uno spazio lineare di funzionali lineari.
- Topologia debole su uno spazio vettoriale topologico. Caso particolare degli spazi normati.

- In spazi normati la limitatezza debole coincide con la limitatezza forte. Successioni debolmente convergenti.
- Prime proprietà della topologia debole su uno spazio normato infinito-dimensionale: non e' localmente limitata, non è metrizzabile.
- La chiusura debole coincide con la chiusura forte per gli insiemi convessi di uno spazio normato.

10.12.2004 (CZ)

- Successioni debolmente di Cauchy e convergenza debole. Il caso dello spazio $C^{(0)}([0,1])$.
- La topologia debole sui sottospazi.
- Criteri per "testare" la convergenza debole delle successioni limitate; applicazione a spazi con duale dotato di base di Schauder. La convergenza debole delle successioni in alcuni spazi classici. Spazi di Schur; ereditarietà della proprietà di Schur.
- Metrizzabilità delle topologie deboli sui limitati in spazi con duale separabile.
- **Teorema di Eberlein-Smulian.** Conseguenze: *i)* studiare la convergenza debole delle successioni è effettivamente utile; *ii)* compattezza debole e compattezza forte si equivalgono negli spazi di Schur (dove topologie strettamente "inscatolate" forniscono gli stessi compatti).

15.12.2004 (CZ)

- La topologia debole è invariante per isomorfismi.
- Semi-continuità inferiore debole della norma. Cenni a problematiche di approssimazione astratta; norme strettamente convesse, insiemi di Chebyshev.
- Esempi concreti di funzionali lineari continui che non realizzano la norma.
- Concetto e definizione di riflessività. Teorema di James.

17.12.2004 (CZ)

- Spazi riflessivi fra gli spazi classici. Uno spazio riflessivo è separabile se e solo se il suo duale è separabile.
- La topologia debole-star sul duale di uno spazio normato, sua dipendenza dal pre-duale considerato.
- Criteri per "testare" la convergenza debole-star delle successioni limitate; applicazione a spazi con pre-duale dotato di base di Schauder. La convergenza debole-star delle successioni in l^1 e in l^∞ come duali rispettivamente di c_0 e di l^1. Successioni non limitate debolmente-star convergenti in l^1 rispetto al pre-duale c_{00}.
- Metrizzabilità della topologia debole-star sull'intero spazio duale e sui limitati in duali con pre-duale separabile.
- **Teorema di Banach-Alaoglu.** Non validità del teorema di Eberlein-Smulian per la topologia debole-star.
- **Teorema di Goldstine.**
- Uno spazio normato è riflessivo se e solo se le sue bolle sono debolmente compatte. Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se il suo duale è riflessivo. Ogni sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo. Ogni spazio riflessivo è debolmente completo per successioni.
- Punti estremi. Cenni al teorema di Krein-Milman. Gli spazi c_0 e $C^{(0)}([0,1])$ non sono isometrici a spazi duali. c_0 ammette rinormamenti duali?

<u>**12.1.2005**</u> **(LV)**

Lemma. *Siano X, Y spazi normati, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora sono equivalenti:*
(i) T *è una mappa aperta (cioè* $T(A)$ *è aperto in* Y *per ogni aperto* $A \subseteq X$*);*
(ii) $0 \in \operatorname{int} T(B_X)$*;*
(iii) $\exists c > 0\ \forall y \in Y\ \exists x \in T^{-1}(y)$*:* $\|x\| \leq c\|y\|$.

Corollario. *Se X è di Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è una mappa aperta, allora anche Y è di Banach.*

Teorema (della mappa aperta). *Siano: X Banach, Y normato, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se $T(X)$ è di II categoria in Y, allora*
* T *è una mappa aperta,*
* $T(X) = Y$*,*
* Y *è di Banach.*

Corollario. *Siano X, Y spazi di Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore iniettivo. Allora sono equivalenti:*
(i) $T^{-1}\colon T(X) \to X$ *è continuo;*
(ii) $T(X)$ *è chiuso in* X.

Teorema (del grafo chiuso). *Siano X, Y spazi di Banach, $T\colon X \to Y$ applicazione lineare. Se il grafico $G(T) = \{(x, y) \in X \oplus Y : y = Tx\}$ è chiuso (in $X \oplus Y$), allora T è continuo.*

<u>**14.1.2005**</u> **(LV)**

Teorema. *Siano M, N due sottospazi dello spazio di Banach X, tali che $X = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$ (cioè, X è la somma diretta algebrica di M e N). Allora $X = M \oplus N$ (somma diretta topologica) se e solo se M, N sono entrambi chiusi.*

Corollario. *Ogni sottospazio chiuso di codimensione finita in uno spazio di Banach è complementato.* (Lo stesso vale anche per spazi normati, ma la dimostrazione è diversa e più lunga.)

- Charatterizzazione degli spazi di Banach isomorfi a spazi di Hilbert tramite la complementabilità dei sottospazi chiusi (Lindenstrauss–Tzafriri). Lo spazio c_0 non è complementato in ℓ_∞ (Sobczyk).
- *Applicazioni dei teoremi della mappa aperta e del grafo chiuso*: due norme (sullo stesso spazio vettoriale) che generano topologie confrontabili sono equivalenti; gli spazi $C_0^2[0,1]$ e $C[0,1]$ sono isomorfi; ℓ_1, come insieme di c_0, è di I categoria e non è chiuso; un'applicazione lineare da $L_p[0,1]$ in $L_q[0,1]$ che è continua per successioni nella convergenza puntuale quasi ovunque è continua.
- *Confronto di alcuni tipi di convergenza di successioni.*
  Sia $\{x_n\} \subset C[0,1]$. Fra le seguenti affermazioni
  (N) $x_n \to 0$ (nella norma)
  (W) $x_n \xrightarrow{w} 0$ (debolmente)
  (BP) $\{x_n\}$ è limitata e $x_n(t) \to 0$ per ogni $t \in [0,1]$
  valgono soltanto le implicazioni $(N) \Rightarrow (W) \Leftrightarrow (BP)$.

  Invece, per una successione $\{x_n\} \subset L_2[0,1]$, fra le seguenti affermazioni
  (N) $x_n \to 0$ (nella norma)
  (W) $x_n \xrightarrow{w} 0$ (debolmente)
  (BP) $\{x_n\}$ è limitata e $x_n(t) \to 0$ per quasi ogni $t \in [0,1]$
  valgono soltanto le implicazioni $(N) \Rightarrow (W) \Leftarrow (BP)$.