METRIZZABILITÀ DELLE TOPOLOGIE DEBOLI (L.V.)

1. Metrizzabilità su tutto lo spazio

Siano X uno spazio vettoriale e L un sottospazio del duale algebrico $X^\sharp$ di X. Inoltre, supponiamo che L separi i punti di X: $\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists f \in L$: $f(x) \neq 0$.

Ricordiamo che $\sigma(X, L)$ è la topologia meno fine su X che renda continui tutti gli elementi di L. È una topologia localmente convessa di Hausdorff, avente come base di $\mathcal{U}(0)$ la famiglia degli insiemi del tipo

$$V_{F,\varepsilon} = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon\ \forall f \in F\} \qquad (F \subset L \text{ finito}, \varepsilon > 0).$$

È nota la seguente proprietà importante: $\big(X, \sigma(X, L)\big)^* = L$.

Teorema. $\big(X, \sigma(X, L)\big)$ *è metrizzabile se e solo se* $\dim(L)$ *è al più numerabile.*

Dimostrazione.
Sia $\{f_n\}$ una base algebrica di L. È facile vedere che, in questo caso, una base di $\sigma(X, L)$-intorni di 0 è formata dagli insiemi del tipo

$$W_{k,\varepsilon} = \{x \in X : |f_n(x)| < \varepsilon\ \forall n = 1, \dots, k\} \qquad (k \in \mathbf{N},\ \varepsilon > 0).$$

Per $x, y \in X$ poniamo

$$d(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x - y)|}{1 + |f_n(x - y)|}\,.$$

Utilizzando il fatto che la funzione $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ è strettamente crescente su $[0, +\infty)$, è facile verificare che d è una metrica su X, invariante per traslazioni, che genera una topologia vettoriale τ_d su X. Una base di τ_d-intorni di 0 è formata dagli insiemi

$$U_\varepsilon = \{x \in X : d(x, 0) < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $k \in \mathbf{N}$ così grande che $\sum_{n>k} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Allora $W_{k,\varepsilon} \subset U_{2\varepsilon}$, in quanto, se $x \in W_{k,\varepsilon}$, si ha

$$d(x, 0) \leq \sum_{n \leq k} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x - y)|}{1 + |f_n(x - y)|} + \sum_{n>k} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

D'altra parte, dati $k \in \mathbf{N}$ e $\varepsilon \in (0, 1/2)$, si ha $U_{\varepsilon/2^k} \subset W_{k,2\varepsilon}$; infatti, se $d(x, 0) < \varepsilon/2^k$, allora per ogni $n = 1, \dots, k$ si ha $(1/2^n)\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} < \varepsilon/2^k$ da cui $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} < \varepsilon$ e l'ultima disuguaglianza implica $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon$.
Abbiamo così dimostrato che $\sigma(X, L) = \tau_d$.

Ora, supponiamo che $\sigma(X, L)$ sia metrizzabile. Allora essa ha una base numerabile $\mathcal{B}$ di $\mathcal{U}(0)$; e possiamo suppore che $\mathcal{B} = \{V_{F_n,\varepsilon_n} : n \in \mathbf{N}\}$ per opportuni insiemi finiti $F_n \subset L$ e numeri positivi ε_n. Poniamo $M = \operatorname{span}\Big[\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\Big]$. Ovviamente, M è un sottospazio di L e la sua dimensione è al più numerabile. Allora $\sigma(X, L) = \sigma(X, M)$ perché $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_{\sigma(X,M)}(0) \subset \mathcal{U}_{\sigma(X,L)}(0)$. Ne segue che $L = \big(X, \sigma(X, L)\big)^* = \big(X, \sigma(X, M)\big)^* = M$ ha dimensione al più numerabile.
q.e.d.

Considerando il fatto che la dimensione algebrica di uno spazio di Banach non può essere infinita numerabile, otteniamo come corollario il seguente teorema sulla metrizzabilità delle topologie w e w^*.

Teorema.
1. *X normato. Allora (X, w) è metrizzabile se e solo se* $\dim(X) < \infty$.
2. *X normato. Allora (X^*, w^*) è metrizzabile se e solo se* $\dim(X)$ *è al più numerabile.*
3. *X Banach. Allora (X^*, w^*) è metrizzabile se e solo se* $\dim(X) < \infty$.

Commento. Le parti 1. e 3. possono essere dimostrate anche utilizzando il teorema di Banach–Steinhaus, ragionando come segue.
Siano X uno spazio normato e L un sottospazio chiuso di X^*. Supponiamo che $\sigma(X, L)$ sia metrizzabile da una metrica d e che X abbia dimensione infinita. Allora ognuno degli insiemi $\{x \in X : d(0, x) < 1/n\}$ è un $\sigma(X, L)$-intorno di 0 e quindi contiene una retta passante per 0. Di conseguenza, esso contiene un punto x_n con $\|x_n\| = n$. Allora $x_n \to 0$ nella topologia $\sigma(X, L)$ e, contemporaneamente, $\|x_n\| \to +\infty$. Contraddizione con il teorema di Banach–Steinhaus!

2. Metrizzabilità sui limitati

Occupiamoci ora di metrizzabilità delle topologie $\sigma(X, L)$ ristrette a tutti i sottoinsiemi limitati di uno spazio normato X. Trattandosi di una topologia vettoriale, la $\sigma(X, L)$ è metrizzabile su ogni insieme limitato se e solo se lo è sulla bolla unitaria di X.

Teorema. *Siano X uno spazio normato e L un sottospazio di X^* separante i punti di X. Allora $\big(B_X, \sigma(X, L)\big)$ è metrizzabile se e solo se L è separabile.*

Dimostrazione.
Se L è separabile, lo è anche la sua sfera unitaria $S_L = \{f \in L : \|f\| = 1\}$. Sia $\{g_n\} \subset S_L$ una successione densa in S_L. Per $x^{**}, y^{**} \in B_{X^{**}}$ si ha $|\langle x^{**} - y^{**}, g_n \rangle| \leq \|x^{**} - y^{**}\| \, \|g_n\| \leq 2$ per ogni n; possiamo quindi definire

$$d(x^{**}, y^{**}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \, |\langle x^{**} - y^{**}, g_n \rangle|.$$

È facile vedere che d è una metrica su $B_{X^{**}}$. (*Dove viene usata la densità di* $\{g_n\}$?)

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$. Sia $k \in \mathbf{N}$ t.che $\sum_{n>k} \frac{2}{2^n} < \varepsilon$; poniamo

$$W = \{y^{**} \in B_{X^{**}} : |\langle y^{**} - x_0^{**} \rangle| < \varepsilon \; \forall n = 1, \ldots, k\}.$$

È facile dimostrare (come nella prima dimostrazione) che la d-bolla

$$\{y^{**} \in B_{X^{**}} : d(y^{**}, x_0^{**}) < 2\varepsilon\}$$

contiene W che è un $\sigma(X^{**}, L)$-intorno di x_0^{**} in $B_{X^{**}}$. Ne segue che, su $B_{X^{**}}$, abbiamo $\tau_d \leq \sigma(X^{**}, L) \leq \sigma(X^{**}, X^*)$. Siccome l'ultima di queste tre topologie (di Hausdorff) è la topologia w^* di X^{**} e la bolla $B_{X^{**}}$ è w^*-compatta, le tre topologie coincidono su $B_{X^{**}}$. In particolare, lo spazio $\big(B_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, L)\big)$ è metrizzato dalla metrica d. Di conseguenza, $\big(B_X, \sigma(X, L)\big)$ è metrizzabile in quanto è (omeomorfo a) un sottospazio di $\big(B_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, L)\big)$ (tramite l'immersione canonica di X in X^{**}).

Ora, supponiamo che $\big(B_X, \sigma(X, L)\big)$ sia metrizzabile. Allora esso ha una base numerabile $\mathcal{B}$ di intorni di 0. Possiamo supporre che $\mathcal{B} = \{V_{F_n,\varepsilon_n} \cap B_X : n \in \mathbf{N}\}$ per opportuni insiemi finiti $F_n \subset L$ e numeri positivi ε_n. Allora

$$M := \operatorname{span}\left[\bigcup_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{F_n}\right]$$

è un sottospazio separabile di L. Per finire, è sufficiente dimostrare che M è denso in L. Se non lo fosse, esisterebbe $x_0^{**} \in X^{**}$ t.che $x_0^{**}|_M = 0$ e $x_0^{**}|_L \neq 0$ (Hahn–Banach). Sia $g_0 \in L$ tale che $x_0^{**}(g_0) = 1$. Allora l'insieme $U = \{x \in B_X : |g_0(x)| < 1/2\}$ è un intorno di 0 in $\big(B_X, \sigma(X, L)\big)$, per cui U contiene $V_{F_k,\varepsilon_k} \cap B_X$ per qualche $k \in \mathbf{N}$. Osserviamo che $\langle x_0^{**}, f\rangle = 0$ per ogni $f \in F_k$. Per il teorema di Goldstine, esiste $x_0 \in B_X$ t.che

$$|\langle x_0, f\rangle| < \varepsilon_k \ \forall f \in F_k \qquad \text{e} \qquad |\langle x_0, g_0\rangle| > 1/2\,.$$

Ne segue che $x_0 \in V_{F_k,\varepsilon_k} \cap B_X$ mentre $x_0 \notin U$. Contraddizione. *q.e.d.*

Come corollario immediato otteniamo il seguente

Teorema. X *normato.*

1. (B_X, w) *è metrizzabile se e solo se* X^* *è separabile.*
2. (B_{X^*}, w^*) *è metrizzabile se e solo se* X *è separabile.*

3. Applicazioni a $\mathbf{C(K)}$

In tutto il presente paragrafo, K sarà uno spazio topologico di Hausdorff. Utilizzando risultati dei due paragrafi precedenti, dimostreremo due teoremi in cui alcune proprietà dello spazio $C(K)$ vengono caratterizzate in termini di K.

Ad ogni $t \in K$ possiamo associare il funzionale $\tilde{t} \in C(K)^*$ dato dalla relazione

$$\tilde{t}(x) = x(t) \qquad (x \in C(K)).$$

Abbiamo così definito un'applicazione $\iota\colon K \to C(K)^*$, $\iota(t) = \tilde{t}$, in modo analogo alla definizione dell'immersione canonica di uno spazio normato nel suo biduale. Denotiamo

$$\tilde{K} = \iota(K) = \{\tilde{t} : t \in K\}.$$

Su $\tilde{K}$ possiamo considerare, oltre alla topologia della norma di $C(K)^*$, anche la topologia w^*.

Lemma (proprietà di ι).

(a) ι *è un omeomorfismo fra* K *e* $(\tilde{K}, w^*)$*;*
(b) $\|\tilde{t}\| = 1$ *per ogni* $\tilde{t} \in \tilde{K}$*;*
(c) $\|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\| = 2$ *per ogni* $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \tilde{K}$ *distinti;*
(d) $\tilde{K}$ *è linearmente indipendente in* $C(K)^*$*.*

Dimostrazione.
(a) Prima osserviamo che ι è iniettiva perché, secondo il teorema di Tietze, $C(K)$ separa i punti di K (cioè, dati due punti distinti di K, esiste una funzione continua su K avente valori distinti nei due punti). Ora, essendo la topologia del compatto K e la topologia w^* topologie di Hausdorff, è sufficiente dimostrare che ι è continua. Fissiamo $t_0 \in K$ e un w^*-intorno W di $\tilde{t}_0$. Possiamo supporre che, per opportuni $n \in \mathbf{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$,

$$W = \{\Phi \in C(K)^* : \bigl|(\Phi - \tilde{t}_0)(x_i)\bigr| < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Allora
$$\iota^{-1}(W) = \{t \in K : \bigl|x_i(t) - x_i(t_0)\bigr| < \varepsilon \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$
è un intorno di t_0 nella topologia di K.
(b) $\|\tilde{t}\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\tilde{t}(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |x(t)| = 1$.
(c) Per il teorema di Tietze, dati due punti distinti $t_1, t_2 \in K$ esiste una funzione $x \in C(K)$ tale che $\|x\| \le 1$ e $x(t_j) = (-1)^j$ $(j = 1, 2)$. Allora $2 = |x(t_1) - x(t_2)| = |(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2)(x)| \le \|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\| \le 2$ (l'ultima disuguaglianza segue dal punto precedente).
(d) Supponiamo che $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{t}_i = 0$ dove $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\tilde{t}_i \in \tilde{K}$. Per ogni k esiste una funzione $x \in C(K)$ t.che $x(t_k) = 1$ e $x(t_i) = 0$ per ogni $i \ne k$ (Tietze); allora $\alpha_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i x(t_i) = \bigl(\sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{t}_i\bigr)(x) = 0$.
q.e.d.

Sia τ_p la topologia della convergenza puntuale su $C(K)$, cioè la topologia prodotto di $\mathbf{R}^K$ ristretta a $C(K)$. È una topologia vettoriale localmente convessa di Hausdorff su $C(K)$, avente come una base di $\mathcal{U}(0)$ la famiglia degli insiemi

$$V_{F,\varepsilon} = \{x \in C(K) : |x(t)| < \varepsilon \ \forall t \in F\} \qquad (F \subset K \text{ finito}, \ \varepsilon > 0).$$

Segue immediatamente dalle definizioni: la topologia τ_p coincide con la topologia $\sigma(C(K), M)$ dove

$$M = \operatorname{span}(\tilde{K}).$$

Teorema. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $\bigl(C(K), \tau_p\bigr)$ *è metrizzabile;*
(ii) $\bigl(B_{C(K)}, \tau_p\bigr)$ *è metrizzabile;*
(iii) K *è al più numerabile.*

Dimostrazione. L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ è ovvia.

Se vale (ii), cioè $\bigl(B_{C(K)}, \sigma(C(K), M)\bigr)$ è metrizzabile, allora M è separabile (v. Paragrafo 2). Ne segue che $\tilde{K}$ è separabile (nella topologia della norma). La proprietà (c) del lemma precedente implica (iii).

Se vale (iii), allora la dimensione algebrica di M è al più numerabile in quanto K è una base di M (secondo la proprietà (d) del lemma). Allora $\bigl(C(K), \sigma(C(K), M)\bigr)$ è metrizzabile (v. Paragrafo 1). *q.e.d.*

Per l'ultimo teorema avremo bisogno del seguente semplice lemma sull'esistenza di "partizioni dell'unità".

Lemma. *Siano T uno spazio metrico e $A_1, \dots, A_k$ sottoinsiemi aperti di T t.che $T = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Allora esistono funzioni reali continui $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ su T tali che:*
(a) $\varphi_i \geq 0$ per ogni i;
(b) $\left[\varphi_i(t) > 0 \Leftrightarrow t \in A_i\right]$ per ogni $t \in T$ e ogni i;
(c) $\sum_{i=1}^k \varphi_i(t) = 1$ per ogni $t \in T$.

Dimostrazione.
Le funzioni $f_i(t) := \operatorname{dist}(t, T \setminus A_i)$ sono nonnegative, continue (addirittura 1-lipschitziane) su T e soddisfano: α) $f_i(t) > 0$ se e solo se $t \in A_i$, e β) $\sum_{i=1}^k f_i(t) > 0$ per ogni $t \in T$. Allora le funzioni

$$\varphi_i(t) = \frac{f_i(t)}{\sum_{j=1}^k f_j(t)} \qquad (i = 1, \dots, k)$$

hanno tutte le proprietà richieste. *q.e.d.*

Teorema. *$C(K)$ è separabile se e solo se K è metrizzabile.*

Dimostrazione.
Se $C(K)$ è separabile, allora $\left(B_{C(K)^*}, w^*\right)$ è metrizzabile (v. Paragrafo 2). Allora anche K è metrizzabile in quanto omeomorfo ad un sottoinsieme di $\left(B_{C(K)^*}, w^*\right)$ (v. (a) del lemma su proprietà dell'immersione ι).

Ora, supponiamo che K sia metrico. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, K ammette una copertura finita con bolle aperte di raggio $1/n$. Usando il precedente lemma per ognuna di queste coperture, otteniamo che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esitono funzioni $\varphi_1^{(n)}, \dots, \varphi_{k(n)}^{(n)} \in C(K)$ e punti $t_1^{(n)}, \dots, t_{k(n)}^{(n)} \in K$ t.che:
- $\varphi_i^{(n)} \geq 0$,
- $\varphi_i^{(n)}(s) > 0$ se e solo se $d(s, t_i^{(n)}) < 1/n \quad (s \in T)$,
- $\sum_{i=1}^{k(n)} \varphi_i^{(n)}(s) = 1 \quad (s \in T)$.

Sia $\mathbf{Q}$ l'insieme dei razionali. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e ogni $q = (q_1, \dots, q_{k(n)}) \in \mathbf{Q}^{k(n)}$ definiamo

$$h_q^{(n)}(s) = \sum_{i=1}^{k(n)} q_i \varphi_i^{(n)}(s).$$

Allora l'insieme $H = \{h_q^{(n)} : n \in \mathbf{N},\, q \in \mathbf{Q}^{k(n)}\}$ è un sottoinsieme numerabile di $C(K)$. Verifichiamo che H è denso in $C(K)$. Dati $x \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$, esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che
- $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$ se $d(t, s) < 1/n$.

Sia $q \in \mathbf{Q}^{k(n)}$ tale che $|x(t_i^{(n)}) - q_i| < \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, k(n)$. Fissiamo arbitrariamente un punto $s \in K$. Dalle proprietà delle funzioni $\varphi_i^{(n)}$ e da come abbiamo scelto n otteniamo:

$$\begin{aligned} |x(s) - h_q^{(n)}(s)| &= \left| \sum_{i=1}^{k(n)} x(s)\varphi_i^{(n)}(s) - \sum_{i=1}^{k(n)} q_i \varphi_i^{(n)}(s) \right| \\ &\leq \sum_i^{k(n)} \varphi_i^{(n)}(s) \Big[|x(s) - x(t_i^{(n)})| + |x(t_i^{(n)}) - q_i| \Big] < 2\varepsilon \sum_i^{k(n)} \varphi_i^{(n)}(s) = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

per cui $\left\| x - h_q^{(n)} \right\| < 2\varepsilon$. *q.e.d.*