Analisi Matematica I, 2004/2005, L. Vesely

Prova scritta del 27 aprile 2005

COGNOME: ..... NOME: .....

N. MATR.: ..... Esame: **[F50]** **[F50-A]** **[F51]** **[F51-A]**

1. Consideriamo il numero complesso $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Allora:

(a) $\mathrm{Re}(z^2) =$ ..... $\mathrm{Im}(z^2) =$ .....

(b) La forma trigonometrica di z^2 è: $z^2 =$ .....

(c) La forma trigonometrica di z è: $z =$ .....

2. Rappresentare graficamente le seguenti due funzioni

$$f(x) = \log(1-x) \qquad\qquad g(x) = 1 - \big|f(x)\big|$$

3. $\lim_{n\to+\infty} \log(n+3) \cdot \log\left(\dfrac{\log(3n)}{\log(n/3)}\right) =$ .....

4. Sia $a \in \mathbf{R}$. L'equazione $x^2 = ae^x$ (nell'incognita x) ammette in $\mathbf{R}$ un'unica soluzione se e solo se il parametro a appartiene all'insieme

.....

5. *[4 punti. Scrivere uno svolgimento completo!]* Stabilire per quali valori di $a \geq 0$ la funzione $f(x) = x^{1+a} \sin(2/x^a)$ ammette asintoto per $x \to +\infty$.

6. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione 3 volte derivabile in 0, tale che

$$f(x) = x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

Poniamo $g(x) = f\big(1 + x - \mathrm{Ch}(x)\big)$. Allora $g^{(3)}(0) =$ .....

7. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua su $\mathbf{R}$. Allora la funzione $g(x) = |x|f(x)$ è derivabile nel punto 0 se e solo se *[barrare la risposta esatta]*:

[A] f è derivabile in 0 con $f'(0) = 0$
[B] f è derivabile in 0
[C] $f(0) = 0$
[D] $1 = 0$ (cioè, mai)

8. *[Scrivere uno svolgimento completo!]* Sia $\{x_n\} \subset (0, +\infty)$ una successione tale che $x_n \to +\infty$. Dimostrare che anche la successione

$$y_n = \inf\big\{\log x_k : k \geq n,\ k \in \mathbf{N}\big\}$$

diverge a $+\infty$.