SAA – *Seminario di Analisi Astratta*

Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano,
Via Saldini 50, Milano.

2013–2014

---

4 giugno 2014 – 15:00

C.A. De Bernardi (assegnista, U.S.M., Milano),

Coperture di ℓ_2 tramite bolle.

Breve sunto. Nel corso del seminario, presenteremo una dimostrazione elementare del seguente recente risultato dovuto a V. Fonf e C. Zanco: *"dato un ricoprimento $\mathcal{B}$ di ℓ_2 tramite bolle chiuse, esiste un punto di ℓ_2 che appartiene a infiniti elementi di $\mathcal{B}$".*

---

14 maggio 2014 – 15:00

C. Viscardi (laureata, U.S.M., Milano),

Insiemi equilateri in spazi di Banach separabili.

Breve sunto. Un sottoinsieme S di uno spazio normato X si dice *equilatero* se esiste una costante $a > 0$ tale che ogni coppia di punti distinti di S abbia distanza a. Nel seminario verrà data una panoramica dello studio di tali insiemi negli spazi di Banach infinito-dimensionali, soffermandosi sul problema (tuttora aperto) della caratterizzazione degli spazi di Banach separabili che ammettono un insieme equilatero infinito. Infatti per molti spazi classici infinito-dimensionali è facile esibire un insieme equilatero di cardinalità uguale al carattere di densità dello spazio, tuttavia sono stati forniti da Terenzi nel 1989 due rinormamenti di ℓ_1 sotto i quali non è possibile trovare una successione equilatera.

Gli strumenti utilizzati saranno alcuni concetti dell'analisi funzionale di base e gli *spreading model* che derivano dalla teoria delle basi di Schauder.

---

9 aprile 2014

G. Romani (studente LM, U.S.M., Milano),

Se ogni tazza è una ciambella, ogni spazio di Banach è di Hilbert.

Breve sunto. Nel 1928 M.R. Fréchet sollevò la seguente questione: è vero che tutti gli spazi di Banach infinito-dimensionali e separabili sono tra loro omeomorfi? Diversi risultati parziali apparirono negli anni successivi (Mazur, Banach), ma il quesito rimase aperto fino alla metà degli anni '60, quando il matematico russo M.I. Kadets riuscì finalmente a dare una risposta affermativa al problema. In questo seminario verrà trattata la dimostrazione originale di Kadets: dapprima verrà risolto il problema nel caso di spazi di Banach che ammettono una base di Schauder e successivamente verrà esteso il risultato anche agli spazi che ne sono privi.

---

24 marzo 2014

L. Vesely (U.S.M., Milano),

Il Teorema di Sierpiński.

Breve sunto. E' facile dimostrare (usando il Teorema di Baire) che l'intervallo $[0, 1]$ non può essere rappresentato come unione numerabile disgiunta di intervalli compatti. Questo fatto può essere generalizzato come segue.
Sia X uno spazio topologico che abbia almeno una delle seguenti due proprietà:

a) *X è metrico completo, connesso e localmente connesso;*
b) *X è un continuum (cioè, compatto di Hausdorff e connesso).*

Allora X non può essere rappresentato come unione disgiunta di una successione di chiusi non vuoti.
La prima parte è un facile lemma basato sempre sul Teorema di Baire, mentre la seconda parte è un noto risultato di Sierpiński.

`Un file di appunti per questo seminario può essere trovato sulla pagina web di L. Vesely: cliccare su` *`ARCHIVIO`* `e cercare nella sezione` *`SAA`*`.`

Per il programma dell'a.a. 2012–2013, v. le pagine seguenti.

2012–2013

---

26 giugno 2013
S. D'Alessandro (Milano), *Algebre di polinomi su spazi di Banach.*

Breve sunto. Nel corso del seminario verranno presentati recentissimi risultati stile Stone-Weierstrass nel contesto infinito-dimensionale.

---

14 maggio 2013
E. Miglierina (Università Cattolica del S.C., Milano), *Coni e riflessività.*

Breve sunto. In this talk, three characterizations of reflexivity for a Banach space X will be shown. The first one is based on the existence in X of a closed convex cone with a nonempty interior such that all the bases generated by a strictly positive functional are bounded, while the second one is stated in terms of the nonexistence of a cone such that it has bounded and unbounded bases (both generated by strictly positive functionals) simultaneously. Such a cone will be called mixed based cone. Some features of this class of cones will be studied. In particular, it will be shown that every cone conically isomorphic to the nonnegative orthant of ℓ^1 is a mixed based cone and that every mixed based cone contains a conically isomorphic copy of ℓ^1_+. Moreover a detailed description of the structure of a mixed based cone will be given. Finally a third characterization of the reflexivity by means of a special class of cones (cones with weakly compact intersection with the unit ball) will be given.

The present talk is essentialy based on two joint works, the first one with Emanuele Casini and the second one with Emanuele Casini, Ioannis Polyrakis and Foivos Xanthos.

La presentazione beamer del seminario può essere trovata sulla pagina web di L. Vesely: cliccare su ARCHIVIO *e cercare nella sezione* SAA.

---

21 marzo 2013
S. Ferrari (Milano), *Rinormamenti strettamente convessi: una caratterizzazione.*

Breve sunto. Presenteremo una caratterizzazione dell'esistenza di una norma strettamente convessa attraverso l'esistenza di una sfera equivalente con una particolare diagonale G_δ.

---

6 marzo 2013
E. Casini (Università dell'Insubria, Como), *Un'introduzione al problema dei preduali.*

Breve sunto. Uno spazio di Banach Y è detto un preduale di X se Y^* è (linearmente) isometrico a X. Da questa definizione nascono in modo naturale varie domande. Ad esempio: quando uno spazio X ha un preduale?, come posso descrivelo?, è unico?. Lo scopo di questo seminario è presentare una panoramica della teoria degli spazi preduali e cercare di rispondere a queste semplici questioni.

---

5 febbraio 2013
C.A. De Bernardi (Milano), *Estensione di funzioni convesse continue da sottospazi.*

Breve sunto. Siano X uno spazio vettoriale topologico reale, $Y \subset X$ un sottospazio, $A \subset X$ un insieme aperto convesso contenente 0, e f una funzione convessa continua definita su $A \cap Y$. Quando è possibile estendere f ad una funzione convessa continua $F : A \to \mathbb{R}$?

Anche nel caso X sia uno spazio di Banach e $A = X$, una tale estensione può non esistere. Per esempio, la funzione convessa continua $g : c_0 \to \mathbb{R}$, definita da

$$g\big((x_n)\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^n,$$

non ammette alcuna estensione convessa continua definita su tutto ℓ_∞.

Nel corso del seminario presenteremo alcuni risultati, contenuti in due lavori non ancora pubblicati (in collaborazione con Libor Vesely), che sotto opportune ipotesi assicurano l'esistenza di una funzione F come sopra. In tali risultati svolgerà un ruolo fondamentale la separabilità degli spazi in gioco.

---

28 novembre 2012
A. Dossi (Milano), *Teorema di Orlicz su serie incondizionatamente convergenti in spazi C-convessi.*

Breve sunto. Il Teorema di Dvoretzky-Rogers afferma che in ogni spazio di Banach X infinito-dimensionale esiste una serie incondizionatamente convergente che non è assolutamente convergente. Dal momento che in uno spazio finito-dimensionale una serie è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente, segue che l'equivalenza tra convergenza incondizionata e assoluta è una caratterizzazione della dimensione finita di uno spazio di Banach X.

Sorge allora spontaneo chiedersi se la convergenza incondizionata di una serie possa imporre dei vincoli diversi dalla convergenza assoluta sul comportamento della serie data dalle norme dei suoi termini. La risposta è affermativa nel caso degli spazi L_p. Il Teorema di Orlicz afferma infatti che se $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ una serie incondizionatamente convergente in uno spazio L_p ($1 \leq p < +\infty$), allora converge la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^{\max(2,p)}$.

Il Teorema di Orlicz si può generalizzare. Si introduce infatti la classe degli spazi C-convessi come la famiglia degli spazi di Banach in cui c_0 non è finitamente rappresentabile, e si dimostra che essi sono tutti e soli gli spazi in cui la convergenza incondizionata di una serie impone un vincolo di convergenza assoluta con esponente r (ovvero $\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^r < +\infty$ per qualche $r > 0$).

References

[1] M.I. Kadets and V.M. Kadets. *Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence.* Birkhauser-Verlag, Basel, 1997.

[2] B. Maurey and G. Pisier. *Sries de variables alatoires vectorielles indpendantes et proprits gomtriques des espaces de Banach.* Studia Math., **58** (1): 45-90, 1976.

---

10 ottobre 2012
V. Fonf (Beer-Sheva, Israel), *Boundaries of Banach spaces*

---

8 ottobre 2012
A. Marchese (Max Planck, Leipzig), *Differenziabilità di funzioni lipschitziane rispetto a misure*

Breve sunto. For every Radon measure μ on $\mathbb{R}^n$, we state an optimal adapted version of the Rademacher theorem. For every point x on $\mathbb{R}^n$, we define a vector subspace $S(x)$ of $\mathbb{R}^n$ (possibly with non-constant dimension) such that every Lipschitz function $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is differentiable at x, along $S(x)$, for μ-a.e. x (i.e., f, restricted to the affine space $x + S(x)$, is differentiable at x). We prove that S is maximal in the following strong sense: there exists a Lipschitz function $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that, for μ-a.e. x, f is not differentiable at x along any line which is not a parallel to $S(x)$. This is a joint work with G. Alberti (Pisa).

---

27 settembre 2012
S. Levi (Milano Bicocca), *Algebre di Banach e algebre di Boole*

---

5 settembre 2012
A. Leiderman (Israele), *Basic families of functions, and embeddings of free locally convex spaces*

Breve sunto. Let X be a completely regular topological space. The free locally convex space on X is a locally convex space $L(X)$ for which X forms a Hamel basis and such that every continuous mapping from X to a locally convex space E extends uniquely to a continuous linear operator from $L(X)$ to E. In our talk we survey the results which are related to the following problem: characterize all topological spaces X such that $L(X)$ can be embedded into $L[0, 1]$ as a closed linear subspace, where $[0, 1]$ is the unit segment.

Per il programma dell'a.a. 2011–2012, v. le pagine seguenti.

2011–2012

---

4 luglio 2012
S. D'Alessandro, *Qualche informazione sulle basi di Markuševič*

Breve sunto. Nel corso del seminario verrà presentata una panoramica introduttiva sulle basi di Markuševič (M-basi) in spazi di Banach (prevalentemente non-separabili). Saranno prese in esame alcune classi di spazi (non-separabili) "più belli degli altri", in cui è possibile utilizzare delle tecniche di ispirazione separabile (con questo intento verranno menzionate le *projectional resolution of the identity*) e che hanno tutti una M-base. Per ciascuna classe verrà fornita una caratterizzazione nei termini di proprietà aggiuntive della base.

Il testo del seminario può essere trovato sulla pagina web di L. Vesely: cliccare su ARCHIVIO *e cercare nella sezione* SAA.

---

13 giugno 2012
K. Goebel, *Problems I left behing*

Breve sunto. During over forty years of studying and working on problems of metric fixed point theory, I raised some problems and asked several questions. For some I was lucky to get answer or find followers who did it for me. Some are still open and seem to be difficult. Some are of my own and some came out after fruitful discussions with my friends and colleagues. The aim of this talk is to present a selection of them. The problems are devoted to: geometry of Banach spaces, minimal invariant sets, classification of Lipschitz mappings, stability of fixed point property, minimal displacement and constructions of optimal retractions.

La presentazione beamer del seminario può essere trovata sulla pagina web di L. Vesely: cliccare su ARCHIVIO *e cercare nella sezione* SAA.

---

30 maggio 2012
C. Zanco, *Coperture di ℓ_2 mediante bolle non sono punto-finite*

Breve sunto. Assegnata una qualunque copertura di un qualunque spazio di Hilbert infinito-dimensionale mediante un'infinità numerabile di bolle, esiste qualche punto dello spazio che è coperto da infinite bolle. Si arriva a dimostrare questa affermazione provando che gli spazi di Banach separabili isomorficamente poliedrali sono tutti e soli quelli la cui sfera unitaria ammette una copertura punto-finita mediante "fette" della bolla unitaria.

---

18 aprile 2012
E. Maluta, *Punti fissi di funzioni nonespansive in spazi di Banach e rinormamenti*

Breve sunto. Uno spazio normato X ha la proprietà di punto fisso per le funzioni nonespansive (FPP) se per ogni $C \subset X$, C non vuoto, chiuso, convesso e limitato, ogni funzione $T : C \to C$ tale che $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ ha un punto fisso in C.

Esistono spazi di Banach X tali che ogni loro rinormamento abbia la FPP o spazi di Banach tali che nessuno dei loro rinormamenti abbia la FPP?

Il primo problema è aperto, anche nel caso X sia l^2. (Di più, non è noto se ogni spazio riflessivo debba avere la FPP.)

Per quanto riguarda il secondo, i risultati di James sulla non distorcibilità di l^1 e di c_o hanno fatto considerare per parecchi anni questi spazi come "probabili" esempi di spazi su cui la FPP non potesse essere indotta da un rinormamento.

Nel 1997, Dowling e Turett hanno dimostrato che se X contiene una copia *asintoticamente isomorfa* di l^1 effettivamente non può avere la FPP, risolvendo in positivo il problema: gli stessi autori, con Lennard, avevano infatti dimostrato che tutti i rinormamenti di $l^1(\Gamma)$, Γ non numerabile , e di l^∞ contengono copie asintoticamente isomorfe di l^1. Il caso di l^1 era però rimasto aperto poiché gli stessi autori, insieme con Johnson e Lennard, hanno costruito un rinormamento di l^1 che non ne contiene copie asintoticamente isomorfe.

Nel 2008, Pei-kee Lin ha dimostrato che tale rinormamento di l^1 gode della FPP.

---

28 marzo 2012
S. D'Alessandro, *K e $C(K)$*

Breve sunto. Nel corso del seminario verranno presentate le caratterizzazioni di alcune belle proprietà dello spazio di Banach $C(K)$ nei termini di proprietà topologiche del compatto K (tale panoramica non ha ovviamente la pretesa di essere esaustiva). Il testo di riferimento è il *Introduction to Banach Spaces* di Habala, Hájek e Zizler.

Appunti del seminario possono essere trovati sulla pagina web di L. Vesely: cliccare su *ARCHIVIO* e cercare nella sezione *SAA*.

---

8 marzo 2012
L. Vesely, *Insiemi invarianti per combinazioni convesse infinite II*

Breve sunto. Dopo un breve ripasso delle definizioni e dei risultati presentati nel primo seminario (del 15/2/2012), ci occuperemo di condizioni sufficienti affinché un sottoinsieme convesso di uno spazio normato sia CS-chiuso (dimensione finita, "even convexity", G_δ) e, tempo permettendo, di esempi e ulteriori proprietà e/o applicazioni di questa interessante classe di insiemi. Anche questa volta il livello del seminario rimarrà non specialistico.

Una traccia dei due seminari può essere trovata sulla pagina web di L. Vesely: cliccare su *ARCHIVIO* e cercare nella sezione *SAA*.

---

15 febbraio 2012
L. Vesely, *Insiemi invarianti per combinazioni convesse infinite*

Breve sunto. Come ben noto, gli insiemi convessi in uno spazio vettoriale sono esattamente quelli invarianti per combinazioni convesse. Richiedendo anche l'invarianza per serie convesse ("combinazioni convesse infinite") ad esempio in uno spazio normato, si ottiene una, anzi due classi più ristrette di insiemi (dipende se la convergenza delle serie convesse viene supposta o richiesta): gli insiemi CS-convessi (o ω-convessi) e quelli CS-compatti (o fortemente ω-convessi).

Nel corso del seminario verranno illustrate alcune proprietà salienti di questo tipo di insiemi, la cui conoscenza è purtroppo poco diffusa, e verranno presentate alcune applicazioni (tra le quali il Teorema della Mappa Aperta) dell'importante "Lemma di Sottrazione".

Il seminario sarà abbastanza elementare e potrà seguirlo senza problemi chiunque conosca le basi di Analisi Funzionale.

---

25 gennaio 2012
C.A. De Bernardi, *Immersioni non lineari di spazi di Banach*

Breve sunto. Siano X e Y spazi di Banach. Il famoso teorema di Mazur-Ulam afferma che ogni isometria suriettiva da X su Y deve essere affine. In generale, l'esistenza di un'isometria da X in Y non assicura neppure l'esistenza di un sottospazio di Y che sia linearmente isomorfo a X. Tuttavia, vale il seguente risultato, che verrà presentato nel corso del seminario, dovuto a G. Godefroy e N.J. Kalton: "Sia X separabile ed esista un'isometria da X in Y. Allora esiste un sottospazio di Y linearmente isometrico a X."

[1] G. Godefroy and N.J. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 121–141.
[2] N.J. Kalton, *The nonlinear geometry of Banach spaces*, Rev. Mat. Complut. **21** (2008), 7–60.
[3] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 48, AMS, Providence, RI, 2000.

---

13 dicembre 2011
J.M.F. Castillo (Badajoz, Spagna),
Spazi di Banach grandi e piccoli costruiti mediante poliedri

---

15 novembre 2011
J. Tišer (Praga, Rep. Ceca),
Fréchet differentiability of Lipschitz functions and a variational principle

Breve sunto. It will be illustrated how to apply a new variational principle to the question of differentiability of Lipschitz functions on Asplund spaces. This approach gives more accessible proofs of the known results as well as it enables to obtain more general new results.

La presentazione beamer è disponibile sulla pagina web di L. Vesely, sezione Archivio.

---

6 ottobre 2011
A. Marchese (Pisa), *Marstrand's theorem and tangent measures*

Breve sunto. Let μ be a locally finite euclidean measure and α a nonnegative real number. Assume that for μ-a.e. x the following limit exists, finite and non-zero:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^\alpha}.$$

Then either $\mu = 0$ or α is a natural number.

This beautiful result is known as Marstrand's theorem, and it is part of a bigger result proved by Preiss in its final version. The aim of this seminar is to give a self-contained proof of Marstrand's theorem, in order to show a simple and clever application of the blow up tecnique in geometric measure theory.

---

15 settembre 2011
M. Lin (Israele), *Almost everywhere convergence of convolution powers on the circle*

Breve sunto. It is well-known that a probability measure μ on the circle $\mathbb{T}$ (with m the normalized Lebesgue measure) satisfies $\|\mu^n * f - \int f\, dm\|_p \to 0$ for every $f \in L_p(m)$ and every (some) $1 \le p < \infty$ if and only if $|\hat{\mu}(n)| < 1$ for every non-zero integer n (μ is called *strictly aperiodic*).

For μ strictly aperiodic, we will present a necessary and sufficient condition, in terms of the Fouries-Stiltjes coefficients of μ, for the almost everywhere convergence $\mu^n * f \to \int f\, dm$ for every $f \in L_p(m)$ and every $p > 1$. We then obtain the dichotomy: for μ strictly aperiodic,

EITHER $\mu^n * f \to \int f\, dm$ a.e. for every $f \in L_p(m)$, $p > 1$,

OR there exists a non-trivial Borel set B with $\limsup \mu^n * 1_B = 1$ a.e. and $\liminf \mu^n * 1_B = 0$ a.e.

(Joint work with Jean-Pierre Conze (Rennes).)