SAA – *Seminario di Analisi Astratta*

Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano,
Via Saldini 50, Milano.

2010–2011

---

14 giugno 2011

E. Casini, *Da Johnson–Lindenstrauss Transform fino a Kashin-Splitting attraverso Compressed-Sensing*

Breve sunto. Le *Johnson–Lindenstrauss Transform* sono famiglie di operatori lineari da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^n$ $(n < N)$ che hanno una grande "probabilità" di lasciare quasi inalterata la norma di un vettore $x \in \mathbb{R}^N$. Questo seminario vuole dare una panoramica del loro utilizzo sia in classici risultati della teoria locale degli spazi di Banach sia nell'attuale teoria dei *Compressed-Sensing.*

!! Il file della presentazione è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio): `users.mat.unimi.it/~libor`

---

17 maggio 2011

S. Ferrari, *Spazi di Banach descrittivi e quasi-norme con la proprietà di Kadec*

Breve sunto. Uno dei problemi aperti più interessanti nell'approccio topologico alla teoria del rinormamento è la ricerca di una proprietà topologica che caratterizzi l'esistenza di un rinormamento con la proprietà di Kadec (i.e. coincidenza delle topologie della norma e debole sulla sfera unitaria). La maggior indiziata risulta essere una proprietà introdotta da Hansell nel 1989 che prende il nome di descrittività.

Quello che volevo presentare in questo seminario è un risultato ancora non pubblicato di Orihuela, il quale dimostra che uno spazio di Banach è descrittivo se e solo se ammette una quasi-norma con la proprietà di Kadec.

[1] R. W. Hansell, *Descriptive sets and the topology of nonseparable Banach spaces*, Serdica Math. J., 27(1):1–66, 2001.
[2] L. Oncina, J. Orihuela and S. Troyanski *Descriptive Banach spaces and Kadec renormings*, preprint, 2007.
[3] J. Orihuela and S. Troyanski, *Deville's master lemma and Stone's discreteness in renorming theory*, J. Convex Anal., 16(3-4):959–972,2009.
[4] M. Raja, *Kadec norms and Borel sets in a Banach space*, Studia Math., 136(1):1–16, 1999.

---

14 aprile 2011
P.L. Papini, *Insiemi di ampiezza costante, insiemi completi, raggi, costante di Jung*

Breve sunto. Gli insiemi di ampiezza costante fanno un po' parte del folclore matematico, e da secoli vengono studiati, soprattutto negli spazi euclidei ma anche nel piano di Minkowski.

Gli insiemi completi (detti anche diametralmente massimali, ma chiamati anche con altri nomi) sono stati introdotti un secolo fa; in tempi più recenti lo studio di questi ultimi insiemi, ma anche degli insiemi di ampiezza costante, è stato esteso a spazi di Banach di qualunque dimensione; gli insiemi completi hanno proprietà più semplicemente trattabili, in generale, da un punto di vista analitico.

Passando alla dimensione infinita, fra le proprietà principali che rischia vadano perse, vi è quella di avere interno non vuoto. Si studiano alcune proprietà di questi tipi di insiemi, anche in relazione al loro raggio, e si mostra come la costante di Jung dello spazio consenta di ottenere alcune informazioni su di essi.

---

22 marzo 2011
C. De Bernardi, *Integrabilità di funzioni convesse: una recente e semplice dimostrazione di un famoso teorema di R.T. Rockafellar*

Breve sunto. Siano X uno spazio di Banach reale e $f, g : X \to (-\infty, +\infty]$ due funzioni proprie s.c.i. convesse. Se $x \in X$, denotiamo con $\partial f(x)$ il subdifferenziale di f in x. Supponiamo che, per ogni $x \in X$, valga $\partial f(x) \subset \partial g(x)$, allora un famoso teorema di R.T. Rockafellar [2, 3] assicura che f e g differiscano solamente per una costante. Nel corso del seminario verrà presentata una recente e semplice dimostrazione (di M. Ivanov e N. Zlateva) di questo teorema [1].

[1] M. Ivanov and N. Zlateva, *A new proof of the integrability of the subdifferential of a convex function on a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 1787–1793.
[2] R.T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pac. J. Math. **17** (1966), 497–510.
[3] R.T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pac. J. Math. **33** (1970), 209–216.

---

10 febbraio 2011
P. Hájek, *Extensions of uniformly continuous mappings to bidual*

Breve sunto. We generalize the classical Aron-Berner extensions of polynomials and holomorphic functions to the case of uniform real C^k smoothness. (Joint work in progress with Choi and Lee.)

---

8 febbraio 2011
P. Hájek, *Differential equations in Banach spaces*

Breve sunto. Some recent results regarding the first order differential equations in Banach spaces will be discussed. In a recent paper (Hajek, Johanis) an example of a first order ODE with a continuous right hand side is constructed in every separable Banach space, which has no local solutions at any point. This is the strongest negation of the classical Peano theorem in finite dimensional spaces. The second part of the talk will focus on a paper (Hajek, Vivi) where a classification of omega limit sets for first order ODE's with Lipschitz right hand side was obtained.

---

22 settembre 2010
Banach Afternoon
V.P. Fonf (Beer-Sheva, Israel), *Some properties of the Gurariy space.*
P.L. Papini (Bologna, Italy), *Covering the sphere and the ball with "small" sets.*
L. Piasecki (Lublin, Poland), *Some remarks about mean lipschitzian mappings.*
T.S.S.R.K. Rao (Bangalore, India), *A generalization of unitaries.*

!! Il testo di alcune delle conferenze è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio):
`users.mat.unimi.it/~libor`

---

9 settembre 2010
L. Zajíček, *Generic Fréchet differentiability on Asplund spaces via almost everywhere strict differentiability on many lines*

Il programma dell'SAA 2009-2010 si trova sulle pagine successive.

2009–2010

---

8 luglio 2010 – 17:30, Sala di Rappresentanza (piano terra)
L. Vesely, *Miglior approssimazione in spazi di Banach poliedrali*

Breve sunto. Verrà presentato un lavoro in preparazione (in collaborazione con V. Fonf e J. Lindenstrauss) che unisce ed estende i risultati di tre manoscritti non pubblicati: due di V. Fonf e J. Lindenstrauss ([1] del 1998 e [2] del 2003) e uno di L. Vesely ([3] del 2005). Soprattutto i primi due preprint hanno circolato tra gli esperti della materia e sono stati citati in alcuni lavori (pubblicati).

Sia Y un sottospazio di uno spazio di Banach X. Sotto opportune ipotesi di poliedralità di X, vengono studiate proprietà di semicontinuità e continuità secondo Hausdorff della proiezione metrica P_Y (la mappa multivoca della miglior approssimazione) e, per sottospazi Y di codimensione finita, le relazioni che intercorrono tra le seguenti quattro proprietà:

(A) Y è fortemente prossiminale;
(B) Y è prossiminale;
(C) ogni elemento di $Y^\perp$ assume la sua norma;
(D) lo spazio quoziente X/Y è poliedrale.

Un nuovo aspetto dei nostri risultati sulla proiezione metrica rispetto a tutti i lavori precedenti (inclusi i manoscritti [1] e [2]) è il fatto che essi valgono anche per sottospazi di codimensione infinita e senza l'ipotesi di prossiminalità. Vengono inoltre presentati alcuni controesempi.

[1] V.P. Fonf and J. Lindenstrauss, *On quotients of polyhedral spaces*, preprint 1998, unpublished.
[2] ______, *On the metric projection in a polyhedral space*, preprint 2003, unpublished.
[3] L. Veselý, *Metric projections in polyhedral spaces*, preprint 2005, unpublished.

- - -

Per comodità ricordo alcune definizioni base. Uno spazio di Banach X è *poliedrale* se la bolla unitaria di ogni sottospazio finito-dimensionale di X è un poliedro. (Verranno poi utilizzate anche altre due nozioni più forti.) Un insieme $Y \subset X$ è *prossiminale* se per ogni $x \in X$ l'insieme

$$P_Y(x) := \{y \in Y : \|x - y\| = d(x, Y)\}$$

è non vuoto. L'applicazione multivoca $P_Y : X \to 2^Y$, $x \mapsto P_Y(x)$, è la *proiezione metrica* di X su Y.

---

27 maggio 2010
C. Zanco, *Su un problema di Corson riguardante coperture puntualmente finite di spazi di Banach*

Breve sunto. Verrà data risposta affermativa alla seguente domanda posta da H.H. Corson nel 1961 ([1]): "È possibile ricoprire qualunque spazio di Banach mediante corpi convessi (cioè insiemi chiusi, limitati e convessi con interno non vuoto) in modo che nessun punto dello spazio appartenga ad infiniti di essi?"

In particolare verrà illustrato un metodo che consente di ottenere in qualunque spazio di Banach un piastrellamento di ordine 2 (cioè una copertura dello spazio mediante corpi convessi, tale che gli interni dei corpi siano a due a due disgiunti e nessun punto dello spazio appartenga a più di due corpi).

[1] H.H. Corson, *Collections of convex sets which cover a Banach space*, Fund. Math. **49** (1961), 143–145.

Durante il seminario sono sorti i seguenti **due problemi aperti**.

1. Esistono spazi di Banach che non ammettano coperture puntualmente finite *numerabili* tramite insiemi convessi, chiusi e limitati ?
(Secondo il risultato presentato da C. Zanco, tale spazio deve avere il carattere normante non numerabile.)

2. È possibile ricoprire uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale con bolle chiuse di raggio almeno 1 in modo che la copertura sia puntualmente finita ?

---

13 maggio 2010

L. Vesely, *Insiemi convessi disgiunti che non possono essere separati con un iperpiano*

Breve sunto. Verrà presentata una dimostrazione del seguente risultato di V. Klee: ogni spazio di Banach separabile non riflessivo contiene una coppia di insiemi disgiunti, entrambi convessi, chiusi e limitati, che non possono essere separati con un iperpiano chiuso. (È invece ben noto che in uno spazio riflessivo tale coppia non può esistere.)

[1] V.L. Klee, *Convex sets in linear spaces, II*, Duke Math. J. **18** (1951), 875–883.

Durante il seminario sono sorti i seguenti **due problemi aperti**:

1. (L. Vesely) *È vero che in ogni spazio di Banach non riflessivo X esistono un sottospazio chiuso $Y \subset X$ e un sottoinsieme $A \subset X$ tali che Y sia non riflessivo, A sia simmetrico, convesso, chiuso, limitato e totale (cioè, $A^{\perp} = \{0\}$),* $\mathrm{int}(A) = \emptyset$, $\mathrm{int}_Y(A \cap Y) \neq \emptyset$ *?*

2. (L. Caspani) *È vero che in ogni spazio di Banach non riflessivo separabile X esistono un insieme non vuoto, convesso, chiuso e limitato C, un vettore $v \in X\setminus\{0\}$ e un intervallo aperto non vuoto $I \subset (0, +\infty)$ tali che, per ogni $t \in I$, $C \cap (C+tv) = \emptyset$ e l'unico elemento di X^* separante (nel senso più debole) C e $C + tv$ sia il funzionale nullo?*

!! Il testo del seminario è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio): `users.mat.unimi.it/~libor`

---

20 aprile 2010
L. Barbaglia, *Il "boundary problem"*

Breve sunto. Sia X uno spazio di Banach reale. Un insieme $B \subset B_{X^*}$ è una *boundary* per X se ogni $x \in X$ assume la sua norma in qualche punto di B. Si intende presentare una recente dimostrazione, dovuta a H. Pfitzner, in cui si mostra, per sottoinsiemi limitati di X, l'equivalenza tra la compattezza debole e la compattezza nella topologia $\sigma(X, B)$ generata da una boundary B. Dalla risposta positiva al "boundary problem" segue facilmente la caratterizzazione, data da R.C. James, della riflessività (nella forma più generale).

!! Il testo del seminario è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio): `users.mat.unimi.it/~libor` .

---

25 marzo 2010
S. Ferrari, *Insiemi di Borel in spazi di Banach*

Breve sunto. L'argomento che si vuole trattare in questo seminario è la relazione che intercorre tra gli insiemi di Borel generati dalla topologia debole di uno spazio di Banach e quelli generati dalla topologia forte. In particolare si vuole rispondere alle seguenti domande:

- quando vale che $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \| \cdot \|)$?
- quando accade che $X \in \mathrm{Borel}(X^{**}, w^*)$?

Questo ci porterà a dimostrare alcuni risultati classici, dovuti a G. A. Edgar e W. Schachermayer, e più recenti, dovuti in particolare a M. Raja e L. Oncina, che mettono in relazione la teoria del rinormamento con tali domande.

[1] D. K. Burke and R. Pol, *On non-measurability of ℓ_∞/c_0 in its second dual*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3955–3959.
[2] G. A. Edgar, *Measurability in a Banach space*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 663–677.
[3] G. A. Edgar, *Measurability in a Banach space, II*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 559–579.
[4] W. Marciszewski and R. Pol, *On Banach spaces whose norm-open sets are F_σ in the weak topology*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 708–722.
[5] M. Raja, *Kadec norms and Borel sets in Banach spaces*, Studia Math. **136** (1999), 1–16.
[6] M. Talagrand, *Comparaison des boreliens d'un espace de Banach pour les topologies forte et faibles*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 1001–1004.

!! Il testo del seminario è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio): `users.mat.unimi.it/~libor` .

---

11 marzo 2010
C. De Bernardi, *Un gioco geometrico in spazi di Banach*

Breve sunto. Sia B_X la bolla unitaria chiusa di uno spazio di Banach X e sia $\mathcal{A}$ la collezione di tutti gli iperpiani di X. Si consideri il seguente gioco che chiameremo *gioco di punto-iperpiano.* Ci sono due giocatori, il giocatore **I** e il giocatore **II**. Inizia il gioco **I**, scegliendo un punto $x_1 \in B_X$; poi, **II** sceglie un iperpiano $H_1 \in \mathcal{A}$, in modo tale che $x_1 \in H_1$. Al secondo passo, **I** sceglie un punto $x_2 \in H_1 \cap B_X$ e **II** sceglie $H_2 \in \mathcal{A}$ in modo tale che $x_2 \in H_2$. E così via. Diciamo che il giocatore **II** vince se la successione $\{x_n\}$ così ottenuta è convergente. Nel corso del seminario verranno presentati alcuni recenti risultati ([1], [2] e [3]) che mettono in relazione alcune proprietà geometriche dello spazio X con l'esistenza di strategie e tattiche vincenti per il giocatore **II** nel gioco di punto-iperpiano.

[1] R. Deville and É. Matheron, *Infinite games, Banach space geometry and the eikonal equation*, Proc. London Math. Soc. **95** (2007), 49–68.
[2] A. Procházka, *Winning tactics in a geometrical game*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1051–1061.
[3] M. Zelený, *The Denjoy-Clarkson property with respect to Hausdorff measures for the gradient mapping of functions of several variables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **58** (2008), 405–428.

---

16 febbraio 2010
A. Marchese, *Struttura degli insiemi di misura nulla e differenziabilità di funzioni lipschitziane*

Breve sunto. In un lavoro in preparazione di G. Alberti, D. Preiss e M. Csornyei, viene mostrato che un insieme di misura nulla nel piano può essere ricoperto da due famiglie di strisce (orizzontali e verticali) ottenute traslando funzioni lipschitziane, in modo tale che la somma degli spessori delle strisce sia piccola a piacere. Questo risultato di ricoprimento ha svariate conseguenze nell'ambito della teoria geometrica della misura e una sua estensione a spazi di dimensione più alta risponderebbe ad alcune questioni aperte. Scopo del seminario è presentare questo risultato e le sue origini. Verrà poi mostrata una sua applicazione nell'inversione del teorema di Rademacher sulla differenziabilità delle funzioni lipschitziane.

---

28 gennaio 2010 – 17:00 (esatte), Sala di Rappresentanza
E. Casini, *Il Lemma di Johnson–Lindenstrauss II*

Breve sunto. Lo scopo del seminario è quello di fornire una dimostrazione (si spera elementare) del risultato del titolo.

[1] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), pp.189–206, Contemp. Math., 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

---

14 gennaio 2010
S. D'Alessandro, *Investigando sul Teorema di Choquet: estensioni "multidirezionali" e applicazioni*

Breve sunto. Il Teorema di Choquet è un importante miglioramento della versione integrale del Teorema di Krein-Milman nella circostanza in cui quest'ultimo sia ambientato in un sottoinsieme compatto, convesso e *metrizzabile* K di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso X e fornisce, dato un insieme K di tal foggia, la possibilità di rappresentare un qualsivoglia punto di K con un integrale di Pettis rispetto ad una opportuna misura di probabilità boreliana supportata dai punti estremi di K. Scopo del seminario è approfondire il classico risultato di Choquet presentando delle generalizzazioni cui si perviene qualora ci si accontenti di ipotesi più lasche sui principali personaggi che intervengono nell'enunciato del teorema, i.e. la misura, l'insieme su cui la misura è concentrata e l'integrale. Nella fattispecie verrà preso in esame il Teorema di Choquet-Bishop-DeLeeuw, che sancisce un'analoga rappresentazione integrale senza alcuna ipotesi sulla metrizzabilità di K, pur di accettare una modifica della definizione di *supporto* di una misura (o, equivalentemente, pur di cambiare la σ-algebra su cui la misura è definita); verrà presentata una generalizzazione ad una classe più ampia di insiemi (i cosiddetti *well-capped cones*) e verrà proposta anche una generalizzazione nei termini di una rivisitazione della definizione di rappresentazione integrale, che chiamerà in causa le funzioni affini della I classe di Baire. Tempo permettendo, sarebbe gradevole presentare alcune applicazioni, come il Teorema di Rainwater (che fornisce un criterio per la convergenza debole) e il Teorema di Haydon (una sorta di rafforzamento della versione geometrica del Teorema di Krein-Milman in un caso particolare). Farò riferimento essenzialmente alle *Lectures on Choquet's Theorem* di Phelps; eventuali ulteriori riferimenti bibliografici saranno esplicitati nel corso del seminario.

---

17 dicembre 2009
S. Mortola, *Completamento relativo di uno spazio di Banach*

Breve sunto. Dati due spazi di Banach, $E \subset F$, il primo incluso con continuità nel secondo, possiamo definire uno spazio intermedio $\widehat{E}$ formato da tutti quegli x che sono limiti in F di successioni x_n limitate in E. Se definiamo $|||x|||_{\widehat{E}}$ come l'estremo inferiore dei numeri $\sup_n ||x_n||_E$, al variare di tutte le possibili successioni x_n convergenti a x, otteniamo uno spazio di Banach che chiamiamo completamento di E relativo a F, (o completamento alla Gagliardo-Aronszajn).

Vengono studiati questi "completamenti" e si analizza cosa succede iterando questa procedura. Si trovano in questo modo successioni decrescenti, che possono essere finite o infinite, di spazi di Banach intermedi tra i due spazi iniziali E, F.

Parallelamente ai completamenti relativi vengono studiate e classificate le inclusioni tra due spazi di Banach.

Il testo del seminario e il lavoro [2] *sono disponibili nell'ufficio di L. Vesely.*

[1] N. Aronszajn and E. Gagliardo, *Interpolation spaces and interpolation methods*, Ann. Mat. Pura Appl. **68** (1965), 51–118.
[2] P. Majer, S. Mortola and G.Prodi, *Inclusions of Banach spaces*, Ricerche Mat. **48** (1999), suppl., 155–165.
[3] J.T. Burnham, *The relative completion of an A-Segal algebra is closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 116–122.

---

19 novembre 2009
S. Ferrari, *Rinormamenti duali di tipo localmente uniformemente convesso*

Breve sunto. Si vuole presentare un risultato di M. Raja del 2002 che fornisce una caratterizzazione topologica degli spazi di Banach il cui duale ammette una norma duale equivalente che sia localmente uniformemente convessa. Si terminerà mostrando come tale risultato si utilizzi per concludere che $\mathcal{C}(K)^*$ ammette una norma duale equivalente che sia localmente uniformemente convessa se e solo se K è unione numerabile di insiemi relativamente discreti.

[1] R. Hansell, *Descriptive sets and the topology of nonseparable Banach spaces*, Serdica Math. J. **27** (2001), 1–66.
[2] M. Raja, *On dual locally uniformly rotund norms*, Israel J. Math. **129** (2002), 77–91.
[3] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski and M. Valdivia, *A nonlinear transfer technique for renorming*, Lecture notes in mathematics, vol. 1951, Springer, 2009.
[4] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman monographs and survey in pure and applied mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, 1993.

---

5 novembre 2009
C. De Bernardi, *Una dimostrazione breve del teorema di Pitt sulla compattezza*

Breve sunto. Verrà presentata una recente dimostrazione (di S. Delpech) del seguente teorema di H.R. Pitt (1936):
se $1 \leq q < p < +\infty$, *ogni operatore continuo lineare da* ℓ_p *o* c_0 *a valori in* ℓ_q *è compatto.*

[1] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8, Springer-Verlag, New York, 2001.
[2] S. Delpech, *A short proof of Pitt's compactness theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 4, 1371–1372.
[3] M. Fabian and V. Zizler, *A "nonlinear" proof of Pitt's compactness theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 12, 3693–3694.

Nel corso del seminario è sorta la seguente **domanda**:
È vero che ogni operatore continuo lineare da ℓ_∞ in ℓ_p ($1 \leq p < +\infty$) è compatto?

---

22 ottobre 2009
L. Vesely, *Decomponibilità di forme quadratiche in spazi di Banach*

Breve sunto. Diciamo che una forma quadratica continua su uno spazio di Banach reale è decomponibile se essa coincide con la differenza di due forme quadratiche continue semidefinite. È noto che ogni forma quadratica continua su uno spazio di Hilbert è decomponibile. Nel corso del seminario verrà dimostrata una caratterizzazione di decomponibilità in termini di fattorizzazione dell'operatore associato alla forma quadratica. Successivamente verranno presentate alcune condizioni sufficienti affinché tutte le forme quadratiche continue su uno spazio di Banach siano decomponibili. Nella classe degli spazi $L_p(\mu)$ si ottiene una caratterizzazione completa.

[1] N. Kalton, S.V. Konyagin and L. Vesely, *Delta-semidefinite and delta-convex quadratic forms in Banach spaces*, Positivity **12** (2008), 221–240.

---

17 settembre 2009
Banach Afternoon

14:00 S. Prus (Lublin, Polonia): *Constructing separated sequences in Banach spaces*
15:45 K. Goebel (Lublin, Polonia): *Mean Lipschitz maps*
17:15 V.P. Fonf (Beer-Sheva, Israel): *Characteristic properties of the Gurariy space in the class of separable Lindenstrauss spaces*

Il programma dell'SAA 2008-2009 si trova sulle pagine successive.

2008–2009

---

28 maggio 2009
A. Zamboni, *Distortion problem: problema aperto o chiuso?*

---

5 maggio 2009
S. D'Alessandro, *Una panoramica sul boundary problem*

Breve sunto. Sia X uno spazio di Banach. $B \subseteq B_{X^*}$ è una *boundary* per B_{X^*} qualora tutti i funzionali dell'immersione isometrica di X in X^{**} assumano la norma su B. Nel corso del seminario saranno presentati due problemi fondamentali sulle boundary: il primo si riferisce alla possibilità di recuperare tutta la bolla del duale prendendo la chiusura forte dell'involucro convesso della boundary; il secondo (formulato da G. Godefroy e battezzato come *boundary problem*) concerne la topologia debole $\sigma(X, B)$, meno fine di w, generata dalla boundary su X, e più esplicitamente riguarda i sottoinsiemi $\|\cdot\|$-limitati e $\sigma(X, B)$-compatti di X, sulla w-compattezza dei quali ci si interroga. Saranno riassunti i risultati fondamentali riguardanti entrambe le questioni (la prima delle quali ha risposta negativa nella massima generalità; la seconda è rimasta aperta fino all'anno scorso ma in questo caso l'epilogo è positivo) e verranno schematizzate le dimostrazioni della soluzione al boundary problem nel caso particolare in cui X sia un preduale di L_1 e infine nel caso generale.

[1] B. Cascales, *On boundaries in Banach spaces*, Spring Conference in Banach Spaces, Paseky – April 2008.
[2] J. Spurný, *The boundary problem for L_1-preduals*, Illinois J. Math, to appear in 2009.
[3] H. Pfitzner, *Boundaries for Banach spaces determine weak compactness*, arXiv/0807.2810, 2008.

!! Il testo del seminario è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio): `users.mat.unimi.it/~libor` .

---

23 aprile 2009
S. Levi, *Continuità uniforme e convergenza uniforme: un nuovo approccio*

Breve sunto. Let $\mathcal{B}$ be an ideal of subsets of a metric space (X, d). This paper considers a strengthening of the notion of uniform continuiuty of a function restricted to members of $\mathcal{B}$ which reduces to ordinary continuity when $\mathcal{B}$ consists of the finite subsets of X and agrees with uniform continuity on members of $\mathcal{B}$ when $\mathcal{B}$ is either the power set of X or the family of compact subsets of X. The paper also presents new function space topologies that are well-suited for this strengthening. As a consequence of the general theory, we display necessary and sufficient conditions for continuity of the pointwise limit of a net of continuous functions.

[1] R. Arens, *A topology for spaces of transformations*, Ann. Math. **47** (1946), 480–495.
[2] M. Atsuji, *Uniform continuity of continuous functions of metric spaces*, Pacific J. Math. **8** (1958), 11–16.

[3] G. Beer and S. Levi, *Strong uniform continuity*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 568–589.
[4] H. Hogbe-Nlend, *Bornologies and Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

---

2 aprile 2009
P. Terenzi, *Sulle applicazioni fisiche degli spazi di Banach*

---

19 marzo 2009
S. Ferrari, *Indice di Szlenk e spazi universali*

Breve sunto. L'indice di Szlenk è un indice ordinale in spazi di Banach che fornisce una misura della separabilità del duale. Lo scopo di questo seminario è quello di introdurre tale indice, e di utilizzarlo per dimostrare un famoso teorema di Szlenk che assicura che non esiste uno spazio riflessivo e separabile universale per la classe degli spazi riflessivi e separabili.

[1] J. Bourgain, *On separable Banach spaces, universal for all separable reflexive spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 241–246.
[2] E. Odell, Th. Schlumprecht and A. Zsák, *Banach spaces of bounded Szlenk index*, Studia Math. **183** (2007), 63–97.
[3] W. Szlenk, *The non-existence of a separable reflexive space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. **30** (1968), 53–61.
[4] E. Odell, *Ordinal indices in Banach spaces*, Extracta Math. **19** (2004), 93–125.
[5] G. Lancien, *A survey on the Szlenk index and some of its applications*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **100** (2006), 209–235.

---

5 marzo 2009
L. Caspani, *Insiemi a spessore costante ed insiemi diametralmente massimali*

Breve sunto. Un insieme a spessore costante è un insieme (chiuso, convesso e limitato) per cui la distanza tra due iperpiani di supporto paralleli è costante (indipendente dalla scelta della coppia di iperpiani). Un insieme diametralmente massimale è un insieme a cui non si possono aggiungere punti senza aumentarne il diametro. Lo scopo di questo seminario è quello di introdurre queste due classi di insiemi in generici spazi di Banach. Verranno presentate, in base alle proprietà dello spazio considerato, alcune relazioni tra le due classi.

[1] G.D. Chakerian and H. Groemer, *Convex bodies of constant width*, Convexity and its Applications, Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 49–96.
[2] H.G. Eggleston, *Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **3** (1965), 163–172.
[3] R. Webster, *Convexity*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.

---

12 febbraio 2009
C. De Bernardi, *Punti e funzionali di supporto di insiemi convessi*

Breve sunto. Sia C un sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio di Banach. Nel corso del seminario, verranno studiate alcune proprietà (topologiche ed insiemistiche) dell'insieme dei punti di supporto e dell'insieme dei funzionali di supporto di C. In particolare, verranno presentati dei recenti risultati di C.DeB. e L.Vesely riguardo la connessione per archi dell'insieme dei punti di supporto di C e riguardo la non-numerabilità dell'insieme dei funzionali di supporto di C normalizzati.

[1] C. De Bernardi and L. Vesely, *On support points and support functionals of convex sets*, Israel J. Math., to appear.
[2] L. Vesely, *A parametric smooth variational principle and support properties of convex sets and functions*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 550–561.

---

27 gennaio 2009
E. Casini, *Il lemma di Johnson–Lindenstrauss*

Breve sunto. Lo scopo di questo seminario è quello di fornire una panoramica introduttiva all'immersione degli spazi metrici in spazi normati, fornendo così un ambito in cui illustrare e discutere il risultato del titolo.

[1] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Extension of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), Contemp. Math., 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 189–206.

---

11 dicembre 2008
Jesus M. F. Castillo, *About the space of Gurarii, and beyond*

Breve sunto. Gurarii's space G is the only separable Banach space with the additional property that all finite dimensional Banach spaces are placed inside G in an "almost unique" position. This construction raises a few intriguing questions (some have already intrigued Gurarii himself, indeed): What about replacing "almost unique" by "unique"? And "finite dimensional" by "separable"? Answers and stunning examples can be obtained combining infinite dimensional geometry and homological techniques.

---

18 novembre 2008
L. Vesely, *Estendibilità di funzioni convesse continue da sottospazi*

Breve sunto. Sia f una funzione convessa continua su un sottospazio chiuso Y di uno spazio di Banach X. Quando f può essere estesa a una funzione convessa continua su tutto X? Tale estensione esiste se f è affine (teorema di Hahn–Banach) o almeno lipschitziana su Y (anche ciò può essere dimostrato usando opportunamente Hahn–Banach). Verranno presentate alcune condizioni (su X, Y, f) sufficienti e/o necessarie e sufficienti che ciò accada, introdotte recentemente da J. Borwein, V. Montesinos e J. Vanderwerff e da L.V. e L. Zajíček.

[1] J. Borwein, V. Montesinos and J. Vanderwerff, *Boundedness, differentiability and extensions of convex functions*, J. Convex Anal. **13** (2006), 587-602.

[2] L. Vesely and L. Zajíček, *On extensions of d.c. functions and convex functions*, preprint (2008), `http://arxiv.org/abs/0810.1433v1`.

Il programma dell'SAA 2007-2008 si trova sulle pagine successive.

2007–2008

10 luglio 2008

C. Zanco, *Coperture abbastanza buone di spazi di Banach infinito-dimensionali abbastanza buoni sono fortemente singolari*

Breve sunto. Recentemente un classico teorema di H.H. Corson (1961) sulle coperture di spazi di Banach riflessivi è stato rafforzato da V. Fonf e C.Z. con il seguente risultato: per ogni copertura τ mediante corpi convessi e limitati di qualunque spazio di Banach, che contenga un sottospazio separabile infinito-dimensionale isomorfo ad un duale (condizione sempre verificata ad esempio in presenza di sottospazi infinito-dimensionali riflessivi), esiste un compatto finito-dimensionale che interseca infiniti membri di τ. In questo seminario si mostra come, sotto la stessa condizione sullo spazio ambiente, alcune proprietà geometriche (ad esempio stretta convessità o lisciezza) possedute dai membri di τ garantiscano l'esistenza addirittura di un segmento che interseca infiniti membri di τ (rimanendo aperto il problema se il segmento possa sempre ridursi ad un punto).

[1] H.H. Corson, *Collections of convex sets which cover a Banach space*, Fund. Math. **49** (1961), 143-145.
[2] V.P. Fonf, *Three characterizations of polyhedral Banach spaces,* Ukrainian Math. J. **42** (1990), 1286–1290. MR **92e**:46028
[3] V.P. Fonf and C. Zanco, *Covering a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2607-2611.
[4] V.P. Fonf and C. Zanco, *Finitely locally finite coverings of Banach spaces*, to appear in J. Math. Anal. Appl. (2008).
[5] V.P. Fonf and C. Zanco, *Covering Banach spaces: beyond the Corson theorem*, to appear in Forum Math. (2008).

---

11 giugno 2008, ore 17:15, Aula C (II piano)

G.L. Forti, *Stabilità secondo Ulam–Hyers delle equazioni funzionali*

Breve sunto. Nel 1940, durante una conferenza al Mathematics Club della University of Wisconsin, S.M. Ulam pose la seguente questione:
Dato un gruppo $(G,\diamond)$ e un gruppo metrico $(G',*)$ con metrica ρ e dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $f : G \to G'$ verifica la disuguaglianza

$$\rho(f(x \diamond y), f(x) * f(y)) \leq \delta \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in G$$

allora esiste un omomorfismo $g : G \to G'$ tale che

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \varepsilon \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in G?$$

In caso di risposta affermativa, diremo che l'equazione funzionale degli omomorfismi, cioè $\varphi(x \diamond y) = \varphi(x) * \varphi(y)$, è **stabile**.

Il primo risultato al riguardo è stato dimostrato da D.H. Hyers nel 1941, nel caso in cui G e G' sono i gruppi additivi di due spazi di Banach.

In questo seminario si intende presentare l'evoluzione del problema di Ulam e alcune sue generalizzazioni a varie equazioni funzionali. In particolare, nel caso degli omomorfismi, discuteremo le proprietà algebriche dei gruppi (o semigruppi) che garantiscono la stabilità.

---

23 maggio 2008
A. Zamboni, *Regolarità massimale per equazioni differenziali astratte su* $\mathbb{R}$

Breve sunto. Una equazione lineare alle derivate parziali può essere riscritta come una equazione differenziale ordinaria (con associato problema di Cauchy) ambientata in un opportuno spazio di Banach. Quest'ultima viene studiata nell'ambito di quella che viene chiamata "teoria dei semigruppi".

In questo seminario vengono presentati alcuni risultati di base di questa teoria, riferiti ad una particolare classe di operatori lineari, detti "operatori settoriali". Una loro generalizzazione, gli "operatori bisettoriali", permette lo studio di equazioni astratte con tempo in tutto $\mathbb{R}$, e verrà presentata nella seconda parte del seminario.

Verrà dimostrato, in particolare, un risultato di "generazione" per gli operatori bisettoriali, che ne chiarisce in qualche modo la natura. Come conseguenza, otteniamo in modo diretto un risultato di regolarità massimale per le equazioni astratte su tutto $\mathbb{R}$.

[1] W. Arendt, A. Zamboni, *Decomposing and twisting bisectorial operators.* (Submitted).
[2] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel 1995.
[3] S. Schweiker, *Asymptotics, regularity and well-posedness of first- and second-order differential equations on the line.* Ph.D thesis, Ulm 2000.
[4] A. Zamboni, *Maximal regularity for evolution problems on the line.* (Submitted).

---

7 maggio 2008
T. Domínguez Benavides, *The Fixed Point Property under renomings: old and new problems*

---

9 aprile 2008
L. Vesely, *Una dimostrazione elementare del teorema di Eberlein-Šmulian*

[1] S. Kremp, *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem and the double limit criterion*, Arch. Math. **47** (1986), 66–69.

La dimostrazione è disponibile sulla pagina web di L. Vesely (sezione Archivio).

---

27 marzo 2008
S. Mortola, *Topologia e duali naturali di alcuni spazi di funzioni*

---

6 marzo 2008
S. Levi, *Un'aplicazione delle convergenze d'insieme agli spazi normati*

---

22 febbraio 2008
A. Marchese, *Continuità nei punti estremi (Alcune proprietà dei punti estremi di un compatto convesso)*

Breve sunto. Il lemma di Choquet afferma che se X è uno s.v.t. localmente convesso e $C \subset X$ è un insieme compatto convesso, allora ogni punto estremo x di C è *fortemente estremo*, ovvero in C esiste un sistema fondamentale di intorni di x costituito da slice (intersezioni di C con un semispazio aperto contenente x). Nel corso del seminario viene dimostrato il lemma e due sue conseguenze: la prima è che in uno s.v.t. localmente convesso l'insieme dei punti estremi di un compatto convesso è uno spazio di Baire, la seconda, tratta dal preprint in bibliografia, è che se X è uno s.v.t. localmente convesso, $C \subset X$ è un compatto convesso, $f\colon C \to \mathbb{R}$ una funzione inferiormente semi continua, limitata, convessa, allora $Ext(C)$ contiene un sottoinsieme denso costituito da punti di continuità per f.

[1] M. Raja, *Continuity at the extreme points*, preprint, 2007.

---

31 gennaio 2008
S. Scoleri, *Misure e dimensione di Hausdorff*

[1] K. Falconer, *Fractal Geometry*, J. Wiley & Sons, 1997.
[2] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.
[3] M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, American Mathematical Society, 2006.

---

20 dicembre 2007
S. D'Alessandro, *Ancora il Teorema di James: secondo James, ma non solo!*

[1] R.C. James, *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math. (2) **66** (1957), 159–169.
[2] R.C. James, *A counterexample for a sup theorem in normed spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 511–512.
[3] P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I, II*, Matfyz Press, 1996.

---

22 novembre 2007
E. Maluta, *Stime della costante di separazione di Kottman in spazi di Banach uniformemente convessi*

Si tratta di un lavoro in collaborazione con P.L. Papini (Bologna).

Breve sunto. Sia X uno spazio di Banach infinito dimensionale. La costante di separazione di Kottman $K(X)$, definita come l'estremo superiore degli $r > 0$ tali che B_X contenga un insieme infinito r-separato (o r-discreto), esprime il grado di non compattezza di B_X. Secondo un profondo teorema di Elton e Odell (1981), $K(X) > 1$ per ogni X.

E' nota la stima $K(X) > 4^{1/5}$ per X non riflessivo (Kryczka-Prus, 2001); e un'altra stima inferiore di $K(X)$ per X uniformemente convesso (Van Neerven, 2005), ma quest'ultima è assai lontana da quella esatta in spazi di Hilbert: $K(H) = \sqrt{2}$.

Nel lavoro viene dimostrata una stima di $K(X)$ per X uniformemente convesso. La nuova stima è migliore di quella di Van Neerven per ogni X, e nel caso hilbertiano essa coincide con il valore esatto di $K(H)$.

8 novembre 2007
C. De Bernardi, *Una dimostrazione del teorema di James (secondo V. Fonf e J. Lindenstrauss)*

[1] V.P. Fonf and J. Lindenstrauss, *Boundaries and generation of convex sets*, Israel J. Math. **136** (2003), 157–172.

25 ottobre 2007
S. Ferrari, *Aspetti geometrici dei sistemi di disuguaglianze lineari*

[1] A. Daniilidis and J.-E. Martinez-Legaz, *Characterizations of evenly convex sets and evenly quasiconvex functions*, J. Math. Anal. Appl. **273** (2002), 58–66.
[2] V. Klee, E. Maluta and C. Zanco, *Basic properties of evenly convex sets*, J. Convex Anal. **14** (2007), 137–148.

4 ottobre 2007
V.P. Fonf, *Tree characterizations of G_δ-embeddings and some Banach spaces, II*

[1] S. Dutta and V.P. Fonf, *On tree characterizations of G_δ-embeddings and some Banach spaces*, preprint (2007) (disponibile nello studio Vesely–Zanco).

27 settembre 2007
V.P. Fonf, *Tree characterizations of G_δ-embeddings and some Banach spaces*

[1] J. Bourgain and H.P. Rosenthal, *Application of the Theory of semi-embeddings to Banach space theory*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 149–188.
[2] V.P. Fonf, *Boundedly complete basic sequences, c_0-subspaces and injections of Banach spaces*, Israel J. Math. **89** (1995), 173–188.
[3] V.P. Fonf, *Semi-embeddings and G_δ-embeddings of Banach spaces*, Math. Notes **39** (1986), no. 3-4, 302–307.
[4] N. Ghossoub and B. Maurey, *G_δ-embeddings in Hilbert spaces II*, J. Funct. Anal. **78** (1988), 271–305.

5 luglio 2007
L. Vesely, *Funzioni convesse continue: quando un quoziente è anche una differenza? (Una proprietà equivalente alla riflessività)*

[1] L. Veselý and L. Zajíček, *On compositions of d.c. functions and mappings*, preprint (2007), `http://lanl.arxiv.org/abs/0706.0624`.
[2] P. Holický, O. Kalenda, L. Veselý and L. Zajíček, *Quotients of continuous convex functions on nonreflexive Banach spaces*, preprint (2007), `http://lanl.arxiv.org/abs/0706.0633`.

Nel corso del seminario è sorto il seguente

Problema. Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico X. È vero che l'insieme $\mathbf{DC}(C) := \{f-g : f, g$ convesse continue su $C\}$ è chiuso rispetto all'operazione del prodotto? (Ciò è vero sotto l'ulteriore ipotesi che X sia localmente convesso oppure C abbia interno non vuoto oppure C sia compatto.)

La risposta sarebbe positiva se fosse risolto positivamente il seguente

Problemino. Se $f: C \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa continua, esiste sempre una funzione affine continua $a: C \to \mathbb{R}$ tale che $f \geq a$?

---

21 giugno 2007

E. Casini, *Dove finiscono le somme di una serie? (Una panoramica sulla convergenza condizionata di serie in spazi di Banach)*

[1] P. Rosenthal, *The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 342–351.

[2] M.I. Kadets and V.M. Kadets, *Series in Banach Spaces*, Birkhauser 1997 *(contiene molti errori di stampa!).*

Nel corso del seminario è sorto il seguente

Problema. Diciamo che uno spazio di Banach ha la proprietà (SR) se esiste una successione $\{x_i\} \in X$ per la quale $SR = X$ dove

$$SR := \{x \in X : x = \sum x_{\pi(i)},\ \pi \text{ permutazione di } \mathbb{N}\}.$$

È facile vedere che gli spazi finito dimensionali hanno (SR) mentre gli spazi non separabili non ce l'hanno (perché $SR \subset \overline{\mathrm{span}}\{x_i\}$). Quali sono gli spazi di Banach con la proprietà (SR)? Gli spazi c_0, ℓ_p $(1 \leq p < +\infty)$ hanno (SR)?
