ARITMETICA DELLE CARDINALITÀ

L.V., 2008

Il nostro scopo è quello di dimostrare alcune proprietà delle cardinalità infinite, tra cui la più importante è l'equipotenza di X e $X \times X$ per ogni insieme infinito.

1. Alcuni strumenti preliminari

Ricordiamo che due insiemi X, Y sono *equipotenti* (o hanno la stessa cardinalità) se esiste $f: X \to Y$ biunivoca. In tal caso scriveremo $X \sim Y$ oppure $|X| = |Y|$.

Se X è equipotente ad un sottoinsieme di Y, scriveremo $|X| \leq |Y|$. Se $|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$, scriveremo $|X| < |Y|$.

Per una dimostrazione del seguente (solo apparentemente banale) teorema si veda il file *Un teorema di punto fisso e un "paradosso"* nell'Archivio.

Teorema di Cantor–Bernstein. *Se* $|X| \leq |Y| \leq |X|$ *allora* $|X| = |Y|$.

Alcuni teoremi importanti di Analisi Matematica sono basati sull'Assioma della scelta (si veda il file *Assioma della scelta e il lemma di Zorn* nell'Archivio). Anche il principio di induzione matematica sfrutta una forma debole di tale assioma. Con il principio di induzione è facilmente dimostrabile che *ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile*.

A noi serviranno altre due conseguenze dell'Assioma della scelta: il seguente teorema sulla confrontabilità di ogni copia di cardinalità, e il Lemma di Zorn.

Teorema. *Per ogni* X, Y *è vera una delle seguenti tre relazioni:* $|X| = |Y|$, $|X| < |Y|$, $|X| > |Y|$. *(In altre parole, ogni due cardinalità sono confrontabili.)*

Un insieme X viene detto *parzialmente ordinato* dalla relazione binaria "$\leq$" se essa è riflessiva ($x \leq x$), transitiva ($x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$) e antisimmetrica ($x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$). (Ad esempio, l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme è parzialmente ordinato dall'inclusione "$\subseteq$".)

Se X è un insieme parzialmente ordinato da "$\leq$", un sottoinsieme C di X viene detto *catena* se esso è totalmente ordinato, nel senso che ogni due elementi di C sono confrontabili (cioè, $\forall x, y \in C$: $x \leq y \ \vee \ y \leq x$).

Un elemento x_0 di X viene detto *massimale* se non vi sono elementi di X strettamente maggiori di x_0 (cioè, $X \ni x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$).

Teorema (Lemma di Zorn). *Sia* X *un insieme parzialmente ordinato da una relazione binaria. Se ogni catena in* X *ammette un maggiorante (in* X*), allora* X *contieme un elemento massimale.*

2. Aritmetica delle cardinalità

Seguiremo liberamente la trattazione della Sezione 24 del libro *Naive Set Theory* di P.R. Halmos. Per semplicità denoteremo con 2 l'insieme $\{0, 1\}$. Scriveremo "$|X| = \infty$" al posto di "X è un insieme infinito".

Osserviamo che l'insieme $A \times 2 = (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$ è l'unione di due insiemi disgiunti equipotenti ad A.

Teorema 1. $|A| = \infty \Rightarrow |A \times 2| = |A|$.

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le coppie (X, f) dove X è un sottoinsieme non vuoto di A e $f\colon X \times 2 \to X$ è una funzione biunivoca. La famiglia $\mathcal{F}$ non è vuota; infatti, se N è un sottoinsieme numerabile di A, allora $N \times 2 \sim N$ e quindi $(N, \varphi) \in \mathcal{F}$ per un'opportuna funzione φ. Inoltre, $\mathcal{F}$ è parzialmente ordinata dalla relazione

$$(X, f) \leq (Y, g) \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y,\ g|_{X\times 2} = f.$$

Se $\mathcal{C}$ è una catena in $\mathcal{F}$, poniamo $Z = \bigcup_{(X,f)\in\mathcal{C}} X$ e definiamo $h\colon Z \times 2 \to Z$ con

$$h(x) = f(x) \ \text{ se } x \in X,\ (X, f) \in \mathcal{C}.$$

È facile vedere che h è una funzione biunivoca e quindi $(Z, h) \in \mathcal{C}$. Inoltre, (Z, h) è un maggiorante di $\mathcal{C}$. Abbiamo così dimostrato che ogni catena in $\mathcal{F}$ ammette un maggiorante. Per il Lemma di Zorn, esiste un elemento massimale (X_0, f_0) di $\mathcal{F}$.

Supponiamo che $|A \setminus X_0| = \infty$. Allora esiste un insieme numerabile $N \subset A \setminus X_0$. Sia $\varphi\colon N \times 2 \to N$ una funzione biunivoca. Ponendo $X_1 = X_0 \cup N$ e definendo $f_1\colon X_1 \times 2 \to X_1$ con $f_1|_{X_0\times 2} = f_0$ e $f_1|_{N\times 2} = \varphi$, otteniamo un elemento $(X_1, f_1) \in \mathcal{F}$ maggiore dell'elemento massimale (X_0, f_0). Questa contraddizione ci dice che la nostra ipotesi era sbagliata, cioè, l'insieme $A\setminus X_0$ è finito. Quindi anche $(A\setminus X_0)\times 2$ è finito e $X_0 = A\setminus(A\setminus X_0)$ è infinito. Ne segue che

$$A \times 2 = (X_0 \times 2) \cup \big((A \setminus X_0) \times 2\big) \sim X_0 \times 2 \overset{f_0}{\sim} X_0 \sim X_0 \cup (A \setminus X_0) = A. \qquad \textit{(q.e.d.)}$$

Corollario 1.

(a) $|A| \leq |B| = \infty \Rightarrow |A \cup B| = |B|$
(Infatti, $|B| \leq |A\cup B| \leq |(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})| \leq |B\times 2| = |B|$; si applichi il teorema di Cantor–Bernstein.)

(b) $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \infty \Rightarrow |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \max\{|A_1|, \ldots, |A_n|\}$
(Dall'ipotesi segue che almeno uno degli insiemi A_i è infinito. Ora, (b) segue da (a) con un procedimento induttivo.)

(c) $|A| = \infty,\ |F| < \infty \Rightarrow |A \times F| = |A|$.
(Segue da (b) e dal fatto che $A\times F$ è l'unione di un numero finito di insiemi equipotenti ad A.)

Ora siamo pronti per dimostrare il teorema principale.

Teorema 2. $|A| = \infty \Rightarrow |A \times A| = |A|$.

Dimostrazione. Procediamo in modo analogo alla dimostrazione del Teorema 1. Definiamo

$$\mathcal{F} = \{(X, f) :\ \emptyset \neq X \subset A,\ f\colon X \times X \to X \text{ biunivoca}\}$$

con l'ordine parziale come nella dimostrazione precedente. Siccome $N \times N \sim N$ per ogni sottoinsieme numerabile di A, la famiglia $\mathcal{F}$ non è vuota. Come prima, applichiamo il Lemma di Zorn per ottenere un elemento massimale (X_0, f_0) di $\mathcal{F}$. Chiaramente, $|X_0| = \infty$.

Supponiamo che $|X_0| < |A|$. Siccome $|A| = |X_0 \cup (A \setminus X_0)| = \max\{|X_0|, |A \setminus X_0|\}$ (Corollario 1), deve essere $|X_0| < |A| = |A \setminus X_0|$. Quindi esiste un insieme $Y \subseteq A \setminus X_0$ tale che $Y \sim X_0$. Ovviamente X_0 e Y sono disgiunti. Osserviamo che ciascuno dei tre insiemi $Y \times X_0$, $X_0 \times Y$ e $Y \times Y$ è equipotente a $X_0 \times X_0$. Per il Corollario 1,

$$P := (Y \times X_0) \cup (X_0 \times Y) \cup (Y \times Y) \sim X_0 \times X_0 \sim X_0 \sim Y.$$

Sia $g \colon P \to Y$ una funzione biunivoca. Ponendo $Z = X_0 \cup Y$, si ha $Z \times Z = (X_0 \times X_0) \cup P$. Definiamo $h \colon Z \times Z \to Z$ con $h|_{X_0 \times X_0} = f_0$, $h|_P = g$. Allora $(Z, h) \in \mathcal{F}$ e $(Z, h) > (X_0, f_0)$ il che è una contraddizione con la massimalità di (X_0, f_0). Quindi deve essere $|X_0| = |A|$. Allora

$$A \times A \sim X_0 \times X_0 \sim X_0 \sim A. \qquad \textit{(q.e.d.)}$$

Corollario 2.

(a) $|A| \leq |B| = \infty \Rightarrow |A \times B| = |B|$
(Infatti, $|A \times B| \leq |B \times B| = |B|$.)

(b) $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \infty \Rightarrow |A_1 \times \ldots \times A_n| = \max\{|A_1|, \ldots, |A_n|\}$
(Si dimostra per induzione usando (a).)

Corollario 3. *Sia A un insieme infinito.*

(a) Esiste una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi a due a due disgiunti di A tale che $A = \bigcup_{X \in F} X$ e $|\mathcal{F}| = |A| = |X|$ per ogni $X \in F$. (Cioè, A può essere decomposto in $|A|$ insiemi ciascuno dei quali equipotente ad A.)

(b) Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di A tale che $A = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ ed esiste un insieme B con $|X| \leq |B| < |A|$ per ogni $X \in \mathcal{F}$, allora $|\mathcal{F}| \geq |A|$. (Cioè, se A è l'unione di una famiglia di insiemi le cui cardinalità abbiano un maggiorante minore di $|A|$, allora tale famiglia ha almeno $|A|$ elementi.)

Dimostrazione.

(a) Per il Teorema 2, esiste una funzione biunivoca $f \colon A \times A \to A$. Si vede facilmente che la famiglia

$$\mathcal{F} = \big\{ f(A \times \{a\}) :\ a \in A \big\}$$

soddisfa le proprietà richieste.

(b) Procedendo per assurdo, supponiamo che $|\mathcal{F}| < |A|$. Allora

$$\begin{aligned} |A| &= |\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X| \leq |\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \times \{X\}| \leq |\bigcup_{X \in \mathcal{F}} B \times \{X\}| \\ &= |B \times \mathcal{F}| = \max\{|B|, |\mathcal{F}|\} < |A| \end{aligned}$$

che è una contraddizione. *(q.e.d.)*

Concludiamo con una conseguenza del Corollario 3 per $\mathbf{R}$.

(a) $\mathbf{R}$ può essere decomposto in un continuo di insiemi ciascuno dei quali della cardinalità del continuo.
(b) Se $\mathbf{R}$ è l'unione di una famiglia di insiemi al più numerabili, la cardinalità di tale famiglia non può essere minore di quella del continuo. Se gli elementi della famiglia sono anche a due a due disgiunti, allora la famiglia ha cardinalità del continuo.

Bibliografia

[1] P.R. Halmos, *Naive Set Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1974.