CONVERGENZA DOMINATA IN MISURA

L.V., 2008

In quanto segue, consideriamo uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, cioè $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi dell'insieme Ω, e $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è una misura.

Definizione. Siano f e f_n ($n \in \mathbf{N}$) funzioni misurabili. Diciamo che le funzioni f_n *convergono in misura* alla funzione f (e scriviamo $f_n \xrightarrow{\mu} f$) se

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) \to 0.$$

È facile vedere che $f_n \xrightarrow{\mu} f$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \quad \mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

I seguenti fatti sono ben noti e possono essere trovati nella maggioranza dei libri sulla teoria della misura.

Fatti. *Supponiamo che gli insiemi e le funzioni che compaiono qui sotto siano misurabili.*

1. $\mu(\Omega) < +\infty$, $f_n(x) \to f(x)$ *per q.o.* $x \in \Omega \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$ (ma non avremo bisogno di ciò).

2. *Se* $f \in L_1(\mu)$, *allora la funzione* $\nu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty)$, *data da* $\nu(A) = \int_A |f|\, d\mu$, *è una misura che soddisfa:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \big[\, \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon \,\big].$$

3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(\bigcup_k A_k)$.

Lemma 1. *Siano* $f \in L_1(\mu)$ *e* $\varepsilon > 0$. *Allora esiste* $A \in \mathcal{A}$ *tale che* $\mu(A) < +\infty$ *e* $\int_{A^c} |f|\, d\mu < \varepsilon$.

Dimostrazione. Poniamo $A_n = \{|f| > \frac{1}{n}\}$ ($n \in \mathbf{N}$). Siccome $+\infty > \int_{A_n} |f|\, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n)$, si ha che $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni n. Inoltre, gli insiemi A_n sono inscatolati in modo crescente e la loro unione è l'insieme $B = \{f \neq 0\}$. Secondo i Fatti 2 e 3, $\int_{A_n} |f|\, d\mu \to \int_B |f|\, d\mu = \int_\Omega |f|\, d\mu$. Siccome $\int_{A_n^c} |f|\, d\mu = \int_\Omega |f|\, d\mu - \int_{A_n} |f|\, d\mu \to 0$, è sufficiente porre $A := A_n$ per un n sufficientemente grande. *[qed]*

Lemma 2. *Se* g, f, f_n *sono funzioni misurabili,* $|f_n| \leq g$ *q.o. in* Ω, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *allora anche* $|f| \leq g$ *q.o. in* Ω.

Dimostrazione. Possiamo supporre che le disuguaglianze $|f_n| \leq g$ valgano in ogni punto di Ω (altrimenti, al posto di Ω, consideriamo $\Omega \setminus N$ dove N è un opportuno insieme di misura nulla).

Ora, abbiamo $|f| - g \leq |f| - |f_n| \leq |f - f_n|$ per ogni n. Allora

$$\{|f| > g\} = \bigcup_{s\in\mathbf{N}}\{|f| - g > \tfrac{1}{s}\} \subseteq \bigcup_{s\in\mathbf{N}}\{|f_n - f| > \tfrac{1}{s} \text{ per ogni } n\}.$$

Osserviamo che $\mu\big(\{|f_n - f| > \frac{1}{s} \text{ per ogni } n\}\big) \leq \mu\big(\{|f_k - f| > \frac{1}{s}\}\big) \to 0$ $(k \to \infty)$. Concludiamo che $\mu\big(\{|f| > g\}\big) \leq \sum_{s\in\mathbf{N}} \mu\big(\{|f_n - f| > \frac{1}{s} \text{ per ogni } n\}\big) = 0$. *[qed]*

Teorema. *Siano f, f_n funzioni misurabili e $g \in L_1(\mu)$ tali che $|f_n| \leq g$ q.o. in Ω $(n \in \mathbf{N})$ e $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Allora $\|f_n - f\|_1 \to 0$ (cioè, $f_n \to f$ nella norma L_1). In particolare, $\int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu$ per ogni $a \in \mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Senza perdere generalità, possiamo supporre che $f_n \geq 0$, $f = 0$. (Altrimenti consideriamo le funzioni $u_n = |f_n - f| \geq 0$ che, secondo Lemma 2, soddisfano $u_n \leq |f_n| + |f| \leq 2g \in L_1(\mu)$.)

Sia $\varepsilon > 0$. Secondo Lemma 1 esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) < +\infty$ e $\int_{A^c} g \, d\mu < \varepsilon$. Secondo Fatto 2, esiste $\delta > 0$ tale che si abbia $\delta\mu(A) < \varepsilon$ e che $\mu(B) < \delta$ implichi $\int_B g \, d\mu < \varepsilon$. Sia $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $\mu(\{f_n > \delta\}) < \delta$ per ogni $n \geq n_0$. Allora, per ogni $n \geq n_0$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n \, d\mu &= \int_{A\cap\{f_n\leq\delta\}} f_n \, d\mu + \int_{A\cap\{f_n>\delta\}} f_n \, d\mu + \int_{A^c} f_n \, d\mu \\ &\leq \delta \cdot \mu(A) + \int_{\{f_n>\delta\}} g \, d\mu + \int_{A^c} g \, d\mu < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ciò dimostra che $\int_\Omega f_n \, d\mu \to 0$. *[qed]*