SPAZI POLIEDRALI PER PRINCIPIANTI
(APPUNTI INFORMALI)

L. VESELY

Convenzione. Tutti gli spazi di Banach considerati nel presente testo sono *reali e di dimensione almeno due* (a meno che non venga specificato altrimenti).

1. Poliedri e spazi poliedrali finito dimensionali

Per la dimostrazione del seguente teorema si veda il libro [1] (Corollary II.4.3 e Corollary IV.1.3) oppure [12, Corollary 2.13].

Teorema 1.1 (Teorema di Weyl-Minkowski)**.** *Per un insieme compatto convesso $P \subset \mathbb{R}^d$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *P è un* poliedro*, cioè, un'intersezione finita di semispazi;*
(ii) *P è un* politopo*, cioè, l'involucro convesso di un insieme finito.*

Corollario 1.2. *Sia $P \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto convesso. Allora P è un poliedro se e solo se* $\operatorname{ext} P$ *(l'insieme dei punti estremi di P) è finito. Inoltre, $P = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} P)$.*

Dimostrazione. Se P è un poliedro, allora $P = \operatorname{conv} A$ con A finito. Per un noto teorema (versione finito dimensionale del teorema di Milman), $A \supset \operatorname{ext} P$. Vice versa, se $\operatorname{ext} P$ è finito, per il teorema di Minkowski (versione finito dimensionale del teorema di Krein-Milman), $P = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} P)$ e P è quindi un poliedro. □

È facile vedere che: l'intersezione di un poliedro con un insieme affine è un poliedro; l'intersezione di un numero finito di poliedri è un poliedro; l'involucro convesso di un'unione finita di poliedri limitati è un poliedro.

Dato un insieme A in uno spazio normato X, il *polare* di A è l'insieme

$$A^\circ = \{f \in X^* :\ f(x) \le 1 \text{ per ogni } x \in A\}.$$

Per $B \subset X^*$, possiamo considerare il suo polare $B^\circ \subset X^{**}$ ma anche il suo "prepolare"

$${}^\circ B = B^\circ \cap X$$

in X (considerando $X \subset X^{**}$). Il ben noto Teorema del Bipolare (che segue dal teorema di Hahn-Banach; si veda [5, Theorem 3.38]) afferma che

$${}^\circ(A^\circ) = \overline{\operatorname{conv}}\,[A \cup \{0\}]\,, \quad ({}^\circ B)^\circ = \overline{\operatorname{conv}}^{w^*}[B \cup \{0\}]\,.$$

Da questo teorema e dal fatto che $(rB_X)^\circ = \frac{1}{r}B_{X^*}$ segue facilmente che, per un insieme convesso chiuso $0 \in C \subset X$, si ha:

- C° è limitato se e solo se $0 \in \operatorname{int} C$;
- C è limitato se e solo se $0 \in \operatorname{int}(C^\circ)$.

Raccogliamo nel seguente teorema alcuni fatti importanti che ci saranno utili in seguito.

Teorema 1.3. *(si veda* [12] *(Theorem 2.11, Corollary 4.5, Theorem 4.7)) Sia $P \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto convesso tale che $0 \in \operatorname{int} P$. Sia $2 \le j \le d$, e denotiamo con $\mathcal{L}_j(\mathbb{R}^d)$ la famiglia di tutti i sottospazi j-dimensionali di $\mathbb{R}^d$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *P è un poliedro;*
(ii) *P° è un poliedro;*
(iii) *la proiezione di P su ogni $L \in \mathcal{L}_j(\mathbb{R}^d)$ è un poliedro;*
(iv) *l'intersezione di P con ogni $L \in \mathcal{L}_j(\mathbb{R}^d)$ è un poliedro.*

Diremo che uno spazio normato finito-dimensionale è *poliedrale* se B_X è un poliedro.

Corollario 1.4. *Sia X uno spazio normato finito-dimensionale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X è poliedrale;*
(ii) *X^* è poliedrale;*
(iii) *ogni sottospazio 2-dimensionale di X è poliedrale;*
(iv) $\operatorname{card}(\operatorname{ext} B_X) < \infty$*;*
(v) $\operatorname{card}(\operatorname{ext} B_{X^*}) < \infty$.

Esempio 1.5. Gli spazi $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ sono poliedrali.

Esercizio 1.6. Dimostrate che se $X_1, \ldots, X_m$ sono spazi finito dimensionali poliedrali allora anche le somme dirette

$$\left(\bigoplus_{i=1}^m X_i\right)_1, \quad \left(\bigoplus_{i=1}^m X_i\right)_\infty$$

sono poliedrali.

Terminiamo questa sezione introduttiva con il seguente teorema da cui cominciamo a intuire l'importanza dello spazio c_0 per gli spazi poliedrali.

Teorema 1.7. *Sia X uno spazio poliedrale finito dimensionale. Allora X è isometrico ad un sottospazio di $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ dove $2m = \operatorname{card}(\operatorname{ext} B_{X^*})$. Di conseguenza, lo spazio c_0 contiene isometricamente tutti gli spazi poliedrali di dimensione finita.*

Proof. Sia $\operatorname{ext} B_{X^*} = \{\pm f_i\}_{i=1}^m$. Allora
$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq m} |f_i(x)|\,.$$
Di conseguenza, l'applicazione $T\colon X \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$, $Tx = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, è un'isometria (non necessariamente suriettiva). La seconda parte segue immediatamente dalla prima in quanto $(t_1, \ldots, t_m) \mapsto (t_1, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots)$ è un'isometria di $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ a valori in c_0. □

2. Spazi poliedrali – prime proprietà

Ora siamo pronti a generalizzare la nozione di poliedralità anche a spazi di dimensione infinita. La definizione è stata introdotta da V. Klee in [13, p. 265].

Definizione 2.1. Uno *spazio poliedrale* è uno spazio di Banach X tale che ogni suo sottospazio finito dimensionale (equivalentemente, 2-dimensionale, v. Corollario 1.4) è poliedrale.

Osservazione 2.2. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio poliedrale è poliedrale.*

Proposizione 2.3. *Lo spazio c_0 è poliedrale.*

Dimostrazione. Presentiamo qui due dimostrazioni di questo fatto importante. In quest'occasione evitiamo di usare il Corollario 1.4.

(a) *Una dimostrazione diretta.* Siano $u_k \in c_0$ $(1 \leq k \leq n)$ linearmente indipendenti. Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la norma
$$|\!|\!|\alpha|\!|\!| = \left\|\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right\|_\infty = \max_{i\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(i)\right|$$
e notiamo che $(\mathbb{R}^n, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ è isometrico con $L := \operatorname{span}\{u_k\}_{k=1}^n$ (come sottospazio di c_0). Esiste $\lambda > 0$ tale che $\lambda\|\alpha\|_1 \leq |\!|\!|\alpha|\!|\!|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Sia $p \in \mathbb{N}$ tale che $|u_k(i)| \leq \frac{\lambda}{2}$ per ogni $i > p$ e $1 \leq k \leq n$. Allora per $i > p$ abbiamo
$$\left|\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(i)\right| \leq \frac{\lambda}{2}\,\|\alpha\|_1 \leq \frac{\lambda}{2}\,|\!|\!|\alpha|\!|\!| \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n),$$
per cui
$$|\!|\!|\alpha|\!|\!| = \max_{1\leq i\leq p} \left|\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(i)\right|.$$
Di conseguenza, $B_{(\mathbb{R}^n, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)}$ è intersezione di $2p$ semispazi, da cui L è poliedrale.

(b) *Una dimostrazione che usa il duale.* Procedendo per assurdo, supponiamo che esista un sottospazio $L \subset c_0$ di dimensione finita che non sia poliedrale. Allora $\operatorname{ext} B_{L^*}$ contiene infiniti punti estremi φ_n $(n \in \mathbb{N})$. Per compattezza, possiamo supporre che $\varphi_n \to \varphi \in S_{L^*}$. Fissiamo $x \in S_L \subset S_{c_0}$ tale che $\varphi(x) = 1$. Per ogni n, consideriamo l'insieme

$$K_n = \{f \in (c_0)^* : \; f|_L = \varphi_n, \; \|f\| = 1\};$$

esso è chiaramente convesso, limitato e w^*-chiuso, e quindi anche w^*-compatto. Per il teorema di Krein-Milman, per ogni n, esiste $f_n \in \operatorname{ext} K_n$.

Dimostriamo ora che $f_n \in \operatorname{ext} B_{(c_0)^*}$. Supponiamo che $g, h \in B_{(c_0)^*}$ siano tali che $f_n = \frac{1}{2}(g+h)$. Siccome $\varphi_n = \frac{1}{2}(g|_L + h|_L)$ e $g|_L, h|_L \in B_{L^*}$, deve essere $\varphi = g|_L = h|_L$ e quindi $g, h \in K_n$. Allora $f_n = g = h$.

Sia ora f un punto di accumulazione di $\{f_n\}$ in $(B_{(c_0)^*}, w^*)$. Necessariamente $f|_L = \varphi$ e quindi

$$f(x) = \varphi(x) = 1. \tag{1}$$

Dall'altra parte, siccome $(c_0)^* = \ell_1$, abbiamo $\operatorname{ext} B_{(c_0)^*} = \{\pm e_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ dove e_k^* denota il k-esimo vettore della base canonica di ℓ_1. Si ha quindi che l'unico punto di w^*-accumulazione di $\operatorname{ext} B_{(c_0)^*}$ è l'origine. Ma ciò contraddice (1). □

Definizione 2.4. Siano X uno spazio di Banach, $A \subset X^*$ un insieme limitato.

- Denotiamo con A' l'insieme dei punti di w^*-accumulazione di A.
- Diciamo che X ha la *proprietà* $(*)$ se
$$f(x) < 1 \quad \text{per ogni } f \in (\operatorname{ext} B_{X^*})', \; x \in S_X$$
(equivalentemente, ogni $f \in (\operatorname{ext} B_{X^*})'$ o ha norma < 1 o non assume la sua norma).

Abbiamo la seguente proprietà sufficiente affinchè uno spazio di Banach sia poliedrale.

Teorema 2.5. *Sia X uno spazio di Banach. Se X ha la proprietà $(*)$ allora X è poliedrale. Ma non vale il vice versa.*

Dimostrazione. Per la prima parte, è sufficientemente ripetere la seconda dimostrazione della Proposizione 2.3. Per la seconda parte si veda [10]. □

Chiaramente, gli spazi $\ell_p(\Gamma)$ e $L_p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$ non sono poliedrali se sono di dimensione ≥ 2, essendo strettamente convessi. Anche gli spazi $\ell_\infty(\Gamma), L_\infty(\mu)$, se infinito dimensionali, non sono poliedrali in quanto contengono ℓ_∞ che contiene ℓ_2. Analogamente, $C[0,1]$ non è poliedrale: è noto che esso contiene tutti gli spazi di Banach separabili e quindi anche ℓ_2. Un po' meno banale è il seguente esempio.

Esempio 2.6. Lo spazio c non è poliedrale.

Dimostrazione. Consideriamo i punti $p_n = \exp\left[i(1 - \frac{1}{n})\frac{\pi}{2}\right]$ $(n \in \mathbb{N})$, $p_\infty = \exp(i\frac{\pi}{2})$, $p_0 = \exp(i\pi)$ del piano. Per $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n x + b_n y = 1$ l'equazione della retta passante per p_n, p_{n+1}; e sia $a_0 x + b_0 y = 1$ l'equazione della retta passante per p_∞, p_0. Allora $a := (a_n)_0^\infty, b := (b_n)_0^\infty$ sono elementi dello spazio c (i cui elementi sono indicizzati in $\mathbb{N}\cup\{0\}$). È facile verifficare che il sottospazio $L := \operatorname{span}\{a,b\}$ di c è isometrico con $\mathbb{R}^2$ nella norma la cui bolla unitaria è $B := \overline{\operatorname{conv}}\{\pm p_0, \pm p_1, \ldots, \pm p_\infty\} = \operatorname{conv}\{\pm p_0, \pm p_1, \ldots, \pm p_\infty\}$. Chiaramente, B ha infiniti punti estremi. Quindi L non è poliedrale. $\square$

Per lo spazio ℓ_1, possiamo utilizzare il seguente risultato di J. Lindenstrauss.

Teorema 2.7 ([15, Theorem 4.1])**.** *Ogni spazio di Banach infinito dimensionale ha un quoziente 2-dimensionale che non sia poliedrale.*

Corollario 2.8. *Se X è uno spazio di Banach duale di dimensione infinita, allora X non è poliedrale.*

Dimostrazione. Sia $X = Y^*$. Per il teorema precedente, esiste un sottospazio chiuso $M \subset Y$ tale che Y/M è 2-dimensionale non poliedrale. Allora $(Y/M)^* = M^\perp \subset Y^*$ è un sottospazio non poliedrale di X. $\square$

Corollario 2.9. *Gli spazi $\ell_1(\Gamma), L_1(\mu)$, se infinito dimensionali, non sono poliedrali.* (Infatti, gli $\ell_1(\Gamma)$ sono duali, mentre gli $L_1(\mu)$ contengono ℓ_1.)

3. Boundaries

Definizione 3.1. Siano X uno spazio di Banach, $\mathcal{E} \subset B_{X^*}$. Definiamo

$$\nu(x) := \sup_{f\in\mathcal{E}} f(x) \qquad (x \in X).$$

Diciamo che:

(a) l'insieme $\mathcal{E}$ è 1-*normante* se $\nu(x) = \|x\|$ per ogni $x \in X$;

(b) l'insieme $\mathcal{E}$ è una *boundary* (per X) se per ogni $x \in X$ esiste $f \in \mathcal{E}$ con $f(x) = \|x\|$.

Esempio 3.2. Ovviamente, S_{X^*} è una boundary. Meno ovviamente, anche

$$\operatorname{ext} B_{X^*} \text{ \emph{è una boundary.}}$$

(Infatti, per $x \in S_X$ l'insieme $D(x) = \{f \in B_{X^*} : f(x) = 1\}$ è convesso, w^*-compatto e non vuoto; esiste quindi $f \in \operatorname{ext} D(x)$; è facile dimostrare che $f \in \operatorname{ext} B_{X^*}$.)

Osservazione 3.3. *Dalle definizioni si possono dedurre facilmente le seguenti osservazioni (nella notazione di Definizione 3.1).*

(a) *Sono equivalenti:*

 (i) $\mathcal{E}$ *è 1-normante;*

 (ii) $B_{X^*} = \overline{\operatorname{conv}}^{w^*} \mathcal{E}$*;*

 (iii) $\overline{\mathcal{E}}^{w^*} \supset \operatorname{ext} B_{X^*}$.

 ((*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) segue dal teorema di Krein-Milman, mentre (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) dal teorema di Milman ["il vice versa del teorema di Krein-Milman"].)

(b) *$\mathcal{E}$ è una boundary se e solo se $\mathcal{E} \cap S_{X^*}$ è una boundary.*
(c) *Ogni boundary è* 1*-normante.*
(d) *$\mathcal{E}$ è una boundary se e solo se $\mathcal{E}$ è* 1*-normante e, per ogni $x \in X$, l'estremo superiore che definisce $\nu(x)$ è in realtà un massimo.*
(e) *Se X è strettamente convesso e riflessivo, allora ogni boundary per X contiene tutta la sfera S_{X^*}, mentre un qualsiasi insieme che sia w^*-denso in S_{X^*} è* 1*-normante.*

Definizione 3.4. Diremo che un insieme $\mathcal{B} \subset S_{X^*}$ ha la *proprietà* $(*)$ se

$$f(x) < 1 \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{B}', x \in S_X.$$

Di conseguenza, X ha la proprietà $(*)$ secondo la Definizione 2.4 se e solo se la boundary $\operatorname{ext} B_{X^*}$ ha la proprietà $(*)$ secondo la Definizione 3.4.

Nel seguente lemma mostreremo che, nella definizione di $(*)$ per X, la boundary $\operatorname{ext} B_{X^*}$ può essere sostituita con un'altra opportuna boundary, o addirittura, con un opportuno insieme 1-normante.

Lemma 3.5. *Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X ha la proprietà $(*)$;*
(ii) *esiste una boundary $\mathcal{B} \subset S_{X^*}$ con la proprietà $(*)$;*
(iii) *esiste un insieme* 1*-normante $\mathcal{E} \subset B_{X^*}$ con la proprietà $(*)$.*

Dimostrazione. Le implicazioni $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sono ovvie. L'implicazione $(iii) \Rightarrow (i)$ segue dall'Osservazione 3.3(a). $\square$

Il seguente importante teorema (strettamente legato alla versione separabile del teorema di James) è stato dimostrato da G. Rodé [21]. Per una dimostrazione molto più accessibile, si veda [19]. Qui enunciamo solo la sua versione per B_{X^*} (anziché per un convesso w^*-compatto $K \subset X^*$).

Teorema 3.6 (Rodé)**.** *Sia X uno spazio di Banach che ammetta una boundary $\mathcal{B} \subset S_{X^*}$ separabile. Allora $B_{X^*} = \overline{\operatorname{conv}}\, \mathcal{B}$ (chiusura nella topologia della norma!).*

Corollario 3.7. *Uno spazio separabile di Banach X è riflessivo se e solo se ogni elemento di X^* assume la sua norma.*

Proof. La parte "solo se" è ovvia per la compattezza debole di B_X. Per dimostrare l'altra implicazione, supponiamo che ogni $f \in X^*$ assuma la sua norma. Ciò significa che $\mathcal{B} := S_X \subset S_{X^{**}}$ è una boundary separabile per X^*. Per il teorema di Rodé, abbiamo $B_{X^{**}} = \overline{\operatorname{conv}}\, S_X = B_X$, cioè, X è riflessivo. $\square$

4. Struttura degli spazi poliedrali

I principali risultati sulla struttura degli spazi poliedrali sono stati dimostrati da V.P. Fonf. Dimostreremo qui solo il caso di spazi separabili e, nella nostra dimostrazione, seguiremo l'articolo [25].

4.1. **Risultati ausiliari.**

Iniziamo con alcuni risultati preparatori. Per $A \subset X$ (X normato), l'*interno algebrico* (o "core") di A è l'insieme

$$\text{a-int}\, A = \{x \in X :\ \forall v \in X\ \exists t > 0 :\ [x - tv, x + tv] \subset A\}.$$

Ovviamente, $\text{int}\, A \subset \text{a-int}\, A \subset A$. Il seguente lemma è ben noto per A chiuso.

Lemma 4.1. *Siano X uno spazio di Banach e $A \subset X$ un insieme di tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Allora* $\text{int}\, A \neq \emptyset$ *se e solo se* $\text{a-int}\, A \neq \emptyset$*. Inoltre, se A è anche convesso,* $\text{int}\, A = \text{a-int}\, A$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione (abbastanza semplice) si veda [25]. □

Corollario 4.2. *Sia A un insieme di prima categoria in uno spazio di Banach X. Allora* $\text{a-int}\, A = \emptyset$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\text{a-int}\, A \neq \emptyset$. Siccome A è contenuto in un insieme $\mathcal{F}_\sigma$ di prima categoria, quest'ultimo ha dei punti interni secondo Lemma 4.1. Ma questo contraddice il teorema di Baire. □

Avremo anche bisogno della nozione di Gâteaux differenziabilità. Sia X uno spazio normato. Una funzione $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *Gâteaux differenziabile* in $x \in X$ se esiste $f \in X^*$ tale che

$$\varphi'(x; v) := \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x + tv) - \varphi(x)}{t} = f(v) \quad \text{per ogni } v \in X;$$

in altre parole, se la derivata direzionale $\varphi'(x, v)$ esiste per ogni $v \in X$ e la funzione $v \mapsto \varphi'(x, v)$ è continua e lineare.

La nozione di Gâteaux differenziabilità è, in generale, più debole di quella di Fréchet differenziabilità (cioè, $\exists f \in X^* : \varphi(x + h) = \varphi(x) + f(h) + o(\|h\|)$, $h \to 0$). Esse coincidono in spazi finito dimensionali per funzioni localmente lipschitziane (in particolare, convesse).

Diciamo che un punto $x \in S_X$ è un *punto liscio* se l'insieme

$$D(x) = \{f \in S_{X^*} : f(x) = 0\} \tag{2}$$

contiene un solo punto; in altre parole, se esiste un unico iperpiano (chiuso) di supporto a B_X in x. Il seguente è un fatto base di Geometria degli spazi di Banach; si veda, ad esempio, [2, Proposition 2, p. 179], [3, Theorem 1, p. 22], [18, Theorem 5.4.17] oppure [5, Corollary 7.22(ii)].

Fatto 4.3. *Sia X uno spazio normato, $x \in X$. La norma $\|\cdot\|$ è Gâteaux differenziabile in x se e solo se $x \neq 0$ e il punto $\frac{x}{\|x\|}$ è un punto liscio.*

Le dimostrazioni dei seguenti due teoremi possono essere trovate nel libro di Phelps [20].

Teorema 4.4 (Mazur)**.** *Sia X uno spazio di Banach separabile. Allora ogni funzione convessa continua $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ è Gâteaux differenziabile a meno di un insieme di prima categoria.*

Teorema 4.5. *Sia X uno* spazio di Asplund*, cioè, uno spazio di Banach tale che ogni suo sottospazio separabile abbia duale separabile. Allora ogni funzione convessa continua $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ è Fréchet differenziabile (e quindi anche Gâteaux differenziabile) a meno di un insieme di prima categoria.*

4.2. **Facce massimali.**

Diciamo che un insieme $F \subset S_X$ è una *faccia massimale* di B_X se esiste un iperpiano di supporto H a B_X tale che $F = H \cap B_X$ $(= H \cap S_X)$ e $\mathrm{int}_H F \neq \emptyset$. (Qui $\mathrm{int}_H F$ denota l'interno relativo di F in H; esso coincide con $\mathrm{int}_{S_X} F$.) Se F è una faccia massimale, i punti di $\mathrm{int}_H F$ verranno chiamati *punti interni di F*.

Osserviamo che due faccie massimali distinte non possono avere punti interni in comune.

Lemma 4.6. *Siano X uno spazio poliedrale, $x \in S_X$. Allora x è un punto liscio se e solo se x è un punto interno di una faccia massimale.*

Dimostrazione. Se x è punto interno di una faccia massimale, esso è chiaramente anche un punto liscio. Dimostriamo il vice versa. Se x è un punto liscio, esiste un'unico iperpiano (chiuso) di supporto H a B_X in x. Sia $Y \subset X$ un qualsiasi sottospazio di dimensione 2 contenente x. Siccome $Y \cap B_X$ è un poligono convesso e la retta $Y \cap H$ è l'unica retta di supporto a tale poligono in x, la retta interrseca il poligono in un segmento che contiene x come un suo punto interno (relativo alla retta). Dall'arbitrarietà di Y segue che $x \in \text{a-int}_H(H \cap B_X)$. Per il teorema di Baire (si potrebbe usare anche Lemma 4.1), $x \in \mathrm{int}_H(H \cap B_X)$. Di conseguenza, $F := H \cap B_X$ è una faccia massimale di B_X e x è un punto interno di F. $\square$

È ben noto che, per uno spazio poliedrale finito dimensionale, ogni punto della sfera unitaria è contenuto in almeno una faccia massimale della bolla unitaria. Il seguente teorema rappresenta una generalizzazione di questo fatto.

Teorema 4.7. *Sia X uno spazio poliedrale. Allora le facce massimali di B_X ricoprono tutta la sfera S_X. Di conseguenza, l'insieme*

$$\mathcal{B}_0 := \{f \in S_{X^*} :\ f^{-1}(1) \cap B_X \text{ è una faccia massimale di } B_X\} \tag{3}$$

è una boundary. Inoltre, se X è separabile e infinito dimensionale, $\operatorname{card}\mathcal{B}_0 = \aleph_0$.

Dimostrazione. Sia Q l'insieme dei punti di S_X che non appartengano all'unione delle facce massimali di B_X. Per il Fatto 4.3, l'insieme E dei punti in cui la norma non sia Gâteaux differenziabile è dato da

$$E = [0, +\infty) \cdot Q.$$

Fissiamo un punto $x \in Q$. Sia $Y \subset X$ un qualsiasi sottospazio di dimensione 2. Siccome B_Y è un poligono con $x \in \partial B_Y$, la sua frontiera S_Y contiene due segmenti (non degeneri) non sovrapponentisi $[u, x]$ e $[x, v]$. Osserviamo che $(u, x] \cup [x, v) \subset Q$. (Infatti, se un punto di $z \in (u, x)$ appartenesse ad una faccia massimale, data da un iperpiano di supporto H, allora H, essendo di supporto a B_X in z, sarebbe di supporto anche in x.) Ora, (3) implica che $x \in \operatorname{int}_Y(E \cap Y)$. Dall'arbitrarietà di Y deduciamo che $x \in \text{a-int}\, E$.

(a) Se X è separabile, E è di prima categoria (Teorema 4.4), ma ciò contraddice Corollario 4.2. Abbiamo dimostrato che, nel caso separabile, le facce massimali ricoprono S_X. Siccome S_X è separabile e gli interni (relativi) delle facce massimali sono a due a due disgiunti, le facce sono al più una quantità numerabile. Quindi $\mathcal{B}_0$ è una boundary numerabile. Per il teorema di Rodé (Teorema 3.6), $B_{X^*} = \overline{\operatorname{conv}}\, \mathcal{B}_0$; in particolare, X^* è separabile.

(b) Se X non è separabile, possiamo applicare il punto (a) e il Teorema 4.5 per dedurre che, anche in questo caso, E è di prima categoria. La stessa contraddizione di prima implica che S_X è ricoperta con le facce massimali di B_X.

Infine, sia X separabile. Se X ha dimensione infinita, la boundary $\mathcal{B}_0$ non può essere finita (altrimenti si avrebbe $\bigcap_{f \in \mathcal{B}_0} f^{-1}(0) \neq \{0\}$ e non sarebbe una boundary). Siccome gli interni (relativi in S_X) delle facce massimali di B_X sono aperti e a due a due disgiunti, $\mathcal{B}_0$ è al più numerabile. Ciò dimostra l'ultima parte dell'enunciato. □

Teorema 4.8. *Siano X uno spazio poliedrale e $\mathcal{B}_0$ la boundary definita nel Teorema 4.7.*

(a) *La boundary $\mathcal{B}_0$ è minimale: essa è contenuta in ogni altra boundary di X.*
(b) $B_{X^*} = \overline{\operatorname{conv}}\, \mathcal{B}_0$ *(chiusura nella norma).*
(c) *Per ogni sottospazio chiuso $Y \subset X$,* $\operatorname{dens} Y = \operatorname{dens} Y^*$. *In particolare, X è uno spazio di Asplund.*

Dimostrazione. (a) segue immediatamente dal fatto che gli elementi di $\mathcal{B}_0$ sono gli unici funzionali di supporto di norma uno nei punti interni delle facce massimali.

(b) Se X è separabile, $\mathcal{B}_0$ è al più numerabile e quindi possiamo applicare il teorema di Rodé (Teorema 3.6). Per il caso di X non separabile si veda [25].

(c) Sia X infinito dimensionale (il caso finito dimensionale è ovvio). È ben noto (e facile da dimostrare) che $\operatorname{dens} X \leq \operatorname{dens} X^*$ vale per ogni spazio di Banach. Visto che la boundary $\mathcal{B}_0$ è infinita (si veda la dimostrazione del teorema precedente), dalla (b) otteniamo che

$$\operatorname{dens} X \leq \operatorname{dens} X^* \leq \operatorname{card} \mathcal{B}_0 \leq \operatorname{dens} X$$

dove l'ultima disuguaglianza si ottiene con lo stesso ragionamento fatto alla fine della dimostrazione del Teorema 4.7. Ciò dimostra che, per ogni spazio poliedrale X, X e X^* hanno lo stesso carattere di densità. Ciò implica (c), grazie alla Osservazione 2.2. $\square$

Esercizio 4.9. Siano X uno spazio poliedrale e $\mathcal{B}_0$ la relativa boundary minimale. Nella notazione di (2), dimostrare che

$$D(x) = \overline{\operatorname{conv}}^{w^*}[D(x) \cap \mathcal{B}_0], \qquad x \in S_X.$$

5. Proprietà isomorfe

Il seguente teorema è stato essenzialmente dimostrato in [6]. Ricordiamo che, data una proprietà geometrica $\mathcal{P}$, dire che uno spazio di Banach X è isomorfo ad uno spazio con la proprietà $\mathcal{P}$ equivale a dire che X ammette un rinormamento (equivalente) con la proprietà $\mathcal{P}$.

Teorema 5.1 (Fonf)**.** *Per uno spazio di Banach separabile X, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X è isomorfo ad uno spazio con la proprietà $(*)$;*
(ii) *X è isomorfo ad uno spazio poliedrale;*
(iii) *X è isomorfo ad uno spazio con una boundary numerabile.*

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ segue dal Teorema 2.5, mentre $(ii) \Rightarrow (iii)$ segue dal Teorema 4.7. Rimane da dimostrare l'implicazione $(iii) \Rightarrow (i)$.

Supponiamo che X, nella sua norma, abbia una boundary numerabile $\mathcal{B} \subset S_{X^*}$. Possiamo supporre che $\mathcal{B}$ sia simmetrica:

$$\mathcal{B} = \{\pm f_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sia $\{\varepsilon_n\} \subset (0, +\infty)$ una successione tale che $\varepsilon_n \searrow 0$, e definiamo

$$g_n := (1 + \varepsilon_n) f_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad C := \overline{\operatorname{conv}}^{w^*} \{\pm g_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Allora C è la bolla unitaria duale di una norma equivalente $|||\cdot|||$ su X e quest'ultima è data da

$$|||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| \, .$$

Inoltre, l'insieme

$$\mathcal{B}_1 := \{\pm g_n : n \in \mathbb{N}\}$$

è 1-normante per $(X, |||\cdot|||)$.

Ora, supponiamo che $g \in \mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$ e $|||x||| = 1$. Ovviamente, $\|g\| \leq 1$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $|f_k(x)| = \|x\|$. Ora

$$g(x) \leq \|x\| = |f_k(x)| < |g_k(x)| \leq |||x||| = 1.$$

Allora $(X, |||\cdot|||)$ ha la proprietà $(*)$ secondo il Lemma 3.5. □

Teorema 5.1 è uno degli ingredienti principali nella dimostrazione del seguente risultato di V.P. Fonf.

Teorema 5.2. *Ogni spazio di Banach poliedrale di dimensione infinita contiene una copia isomorfa di c_0.*

Proof. Per la dimostrazione si veda la sottosezione 5.1. □

Il seguente corollario generalizza Corollario 2.8.

Corollario 5.3. *Uno spazio poliedrale non può essere isomorfo ad uno spazio duale.*

Dimostrazione. Supponiamo che $X = Z^*$ sia poliedrale. Per il Teorema 5.2, Z^* contiene una copia isomorfa di c_0. Ma è noto (si veda [5, Theorem 4.44] oppure [16, Proposition 2.e.8]) che allora Z contiene un sottospazio complementato isomorfo a ℓ_1 e quindi $X = Z^*$ contiene una copia isomorfa di ℓ_∞. Ma ciò non è possibile perché ℓ_∞ non è uno spazio di Asplund ($\ell_\infty \supset \ell_1$, e $\ell_1^* = \ell_\infty$ non è separabile) e tuti gli spazi poliedrali lo sono. □

Corollario 5.4. *Sia X uno spazio di Banach che soddisfi almeno una delle seguenti condizioni.*

(a) *X contiene una copia isomorfa di un duale infinito dimensionale.*
(b) *X contiene una copia isomorfa di ℓ_1.*
(c) *X è separabile e B_X non è sequenzialmente densa in $(B_{X^{**}}, w^*)$.*
(d) *X è separabile e $\operatorname{card} X^* > \operatorname{card} \mathbb{R}$ $(= \operatorname{card} X)$.*
(e) $\operatorname{dens} X^* > \operatorname{dens} X$.

Allora X non è isomorfamente poliedrale (cioè, esso è privo di rinormamenti poliedrali).

Dimostrazione. (a) segue dal Corollario 5.3, mentre (b) segue da (a). Le (c) e (d) seguono da (b) secondo [5, Theorem 5.40] (che afferma che, per spazi di Banach separabili, le condizioni (b),(c),(d) sono equivalenti). Infine, se vale (e) allora X non è uno spazio di Asplund, e quindi non è isomorfamente poliedrale (Teorema 4.8(c)). □

Definizione 5.5. Siano X, Y due spazi di Banach. Diciamo che X *contiene Y quasi isometricamente* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un isomorfismo $T\colon Y \to X$ tra Y e $T(Y)$ tale che

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\|x\| \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Diciamo inoltre che X *è saturato da copie quasi isometriche di* Y se ogni sottospazio chiuso infinito dimensionale di X contiene Y quasi isometricamente.

Corollario 5.6. *Ogni spazio isomorfamente poliedrale di dimensione infinita è saturato da copie quasi isometriche di* c_0.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che ogni spazio isomorfamente poliedrale (infinito dimensionale) contiene c_0 quasi isometricamente. Ma ciò segue dal Teorema 5.2 e dal risultato [16, Proposition 2.e.3] che afferma che uno spazio isomorfo a c_0 contiene c_0 quasi isometricamente. (Un risultato analogo vale anche per ℓ_1, ma non per ℓ_2; quest'ultimo fatto è la famosa soluzione del "problema di distorsione" in [22].) $\square$

Lo spazio c_0 è quindi uno spazio poliedrale in qualche modo "primitivo": esso contiene isometricamente ogni spazio poliedrale di dimensione finita, ed è contenuto quasi isometricamente in ogni spazio poliedrale di dimensione infinita.

Secondo Teorema 4.8 e Corollario 5.6, *se* X *è isomorfamente poliedrale e separabile allora* X *è saturato da copie quasi isometriche di* c_0 *e* X^* *è separabile.* Il seguente risultato di Leung mostra che il vice versa è falso.

Teorema 5.7 ([14])**.** *Esiste uno spazio di Banach separabile* X *(in realtà uno spazio di Orlicz di successioni) tale che* X^* *sia separabile,* X *è saturato da copie quasi isometriche di* c_0*, ma* X *non è isomorfamente poliedrale.*

5.1. **Dimostrazione del Teorema 5.2.**

In tutta questa sottosezione, X denota uno spazio di Banach infinito dimensionale. Dati $x \in X$ e $r > 0$, denotiamo con $U(x, r)$ la bolla aperta di raggio r centrata in x.

Lemma 5.8. *Supponiamo che* X *soddisfi la proprietà* $(*)$*. Allora, per ogni* $x \in X \setminus \{0\}$*, esistono un insieme finito* $\mathcal{B}_x \subset \operatorname{ext} B_{X^*}$ *e* $\delta_x > 0$ *tali che*

$$\|\cdot\| = \max_{f \in B_x} f(\cdot) \quad \textit{in } U(x, \delta_x).$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in S_X$. Denotando $\mathcal{B} = \operatorname{ext} B_{X^*}$, l'insieme $\mathcal{B}'$ è w^*-compatto (essendo w^*-chiuso e contenuto in B_{X^*}), e quindi

$$\max_{f \in \mathcal{B}'} f(x) =: \mu < 1. \tag{4}$$

Sia $\delta > 0$ tale che $\mu + 3\delta < 1$.

Affermiamo che esiste un insieme finito $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ tale che

$$\sup_{f \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_x} f(x) < \mu + \delta.$$

Infatti, nel caso contrario, esisterebbe un insieme infinito $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ tale che

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} f(x) \geq \mu + \delta$$

e, per $g \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{B}'$, si avrebbe $g(x) \geq \mu + \delta$ che contraddice (4).

Ora, per $\|y - x\| < \delta$ abbiamo

$$\sup_{f \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_x} f(y) < (\mu + \delta) + \delta < 1 - \delta < \|x\| - \|x - y\| \leq \|y\| = \max_{f \in \mathcal{B}} f(y)\,.$$

Ne segue che, per ogni tale y, $\|y\| = \max_{f \in \mathcal{B}_x} f(y)$. $\square$

Lemma 5.9. *Supponiamo che X soddisfi la proprietà $(*)$. Dati due insiemi finiti $\emptyset \neq F \subset S_X$ e $\mathcal{E} \subset S_{X^*}$, esistono $v \in X \setminus \{0\}$, $x_0 \in F$ e $f \in (\operatorname{ext} B_{X^*}) \setminus \mathcal{E}$ tali che*

$$F \pm v \subset S_{X^*}, \quad f(x_0 + v) = 1.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in F$, siano $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B} := \operatorname{ext} B_{X^*}$ e $\delta_x > 0$ come in Lemma 5.8. L'insieme $\mathcal{A} := \mathcal{E} \cup \bigcup_{x \in F} \mathcal{B}_x$ è finito e quindi esiste $u \in \bigcap_{g \in \mathcal{A}} g^{-1}(0)$ tale che $0 < \|u\| < \min_{x \in F} \delta_x$.

Fissiamo $x \in F$ e denotiamo $L_x = \operatorname{span}\{x, u\}$. Siccome

$$\|x \pm u\| = \max_{f \in \mathcal{B}_x} f(x \pm u) = \max_{f \in \mathcal{B}_x} f(x) = \|x\| = 1,$$

il punto x è interno a un lato del poligono B_{L_x}. Ne segue che esistono $t_x > 0$ e un segno $\sigma_x \in \pm 1$ tale che

$$\|x \pm tu\| = 1, \quad \|x + t\sigma_x u\| > 1 \text{ per ogni } t > t_y.$$

Ora, sia $x_0 \in F$ tale che $t_{x_0} = \min_{x \in F} t_x$. Ora, ponendo $v := t_{x_0}\sigma_{x_0} u$, abbiamo $\|x \pm v\| = 1$ per ogni $x \in F$. Inoltre, la definizione di x_0 implica che il punto $x_0 + v = x_0 + t_{x_0}\sigma_{x_0} u$ appartiene anche ad un altro lato Λ di $B_{L_{x_0}}$ non contenente x_0. Esiste $f \in \mathcal{B}$ che sia un funzionale di supporto a B_X in un punto interno (relativo) di Λ. Necessariamente $f(x_0 + v) = 1$ (cioè, f è di supporto anche in $x_0 + v$) e $f(x_0) < 1$. Ne segue che $f(v) > 0$ e quindi $f \notin \mathcal{E}$ (per la scelta di v). $\square$

Definizione 5.10. Diciamo che una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ in X è:

- *w.u.C.* ("weakly unconditionally Cauchy") se $\sum_{n=1}^{+\infty} |f(x_n)| < +\infty$ per ogni $f \in X^*$;
- *converge incondizionatamente* se ogni sua serie permutata $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\pi(n)}$ converge (in norma).

Fatto 5.11. *Per la dimostrazione dei seguenti teoremi si veda il libro* [4].

(i) *La convergenza assoluta (cioè, $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$) implica sempre quella incondizionata (facile), mentre il vice versa vale se e solo se $\dim X < \infty$ (teorema di Dvoretzky–Rogers).*

(ii) *La convergenza incondizionata implica sempre la w.u.C. (facile), mentre il vice versa vale se e solo se X non contiene copie isomorfe di c_0 (teorema di Bessaga–Pelczynski).*

(iii) *Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}$ converge incondizionatamente, allora l'insieme*

$$\Sigma := \left\{ \sum_{n \in F} \theta_n x_n : \ F \subset \mathbb{N} \text{ finito, } \theta_n \in \{\pm 1\} \right\}$$

è relativamente compatto.

Teorema 5.12. *Supponiamo che X sia separabile e soddisfi la proprietà $(*)$. Allora X contiene una copia isomorfa di c_0.*

Dimostrazione. Procedendo per assurdo, supponiamo che X non contenga c_0. Fissiamo un qualsiasi $x_1 \in S_X$ e $f_1 \in \mathcal{B} := \operatorname{ext} B_{X^*}$ con $f(x_1) = 1$. Poniamo $F_1 = \{\pm x_1\}$ e $\mathcal{E}_1 = \{\pm f_1\}$. Applicando Lemma 5.9, otteniamo $x_2 \neq 0$, $\theta_1^{(1)} \in \{\pm 1\}$ e $f_2 \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{E}_1$ tali che $\| \pm x_1 + \pm x_2\| = 1$ e $f_2(\theta_1^{(1)} x_1 + x_2) = 1$.

Poniamo $F_2 = \{\pm x_1, \pm x_2\}$ e $\mathcal{E}_2 = \{\pm f_1, \pm f_2\}$, e applichiamo Lemma 5.9 per trovare $x_3 \neq 0$, $\theta^{(2)} = (\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}) \in \{\pm 1\}^2$ e $f_3 \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{E}_2$ tali che $\|\pm x_1 + \pm x_2 + \pm x_3\| = 1$ e $f_2(\theta_1^{(2)} x_1 + \theta_2^{(2)} x_2 + x_3) = 1$. E così via induttivamente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$x_n \in X \setminus \{0\}, \quad \theta^{(n)} \in \{\pm 1\}^n, \quad f_n \in \mathcal{B}$$

tali che, per $s_{n+1} := \sum_{k=1}^n \theta_k^{(n)} x_k + x_{n+1}$,

$$f_{n+1} \neq f_k \ (1 \leq k \leq n), \quad f_{n+1}(s_{n+1}) = 1, \quad \sum_{k=1}^n \sigma_k x_k \in S_X \ (\sigma \in \{\pm 1\}^n).$$

Ora, per ogni $g \in X^*$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k)| = \max_{\sigma \in \{\pm 1\}^n} \sum_{k=1}^n \sigma_k g(x_k) = \max_{\sigma \in \{\pm 1\}^n} g\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k x_k\right) \leq \|g\|,$$

il che implica che la serie $\sum_n x_n$ è w.u.C. Per il Fatto 5.11(ii), essa converge incondizionatamente. Siccome (B_{X^*}, w^*) è un compatto metrizzabile e vale Fatto 5.11(iii), esiste una successione strettamente crescente $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tale che

$$f_{n_k} \overset{w^*}{\to} f \in \mathcal{B}', \quad s_{n_k} \overset{\|\cdot\|}{\to} s \in S_X.$$

Si ha che $f(s) = \lim_k f_{n_k}(x_{n_k}) = 1$, ma ciò contraddice la proprietà $(*)$. $\square$

Dimostrazione del Teorema 5.2 (cioè, del fatto che *se X è poliedrale esso contiene c_0*).
Sia $X_1 \subset X$ un sottospazio separabile infinito dimensionale di X. Secondo Teorema 5.1, X_1 ammete un rinormamento con la proprietà $(*)$. Il resto segue dal Teorema 5.12.

6. Spazi $c_0(\Gamma)$ e somme dirette

Ricordiamo che, dato un insieme non vuoto Γ, lo spazio $c_0(\Gamma)$ è lo spazio di tutte le funzioni $x \colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme

$$\{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| \geq \varepsilon\}$$

sia finito. Lo spazio $c_0(\Gamma)$ nella norma $\|x\|_\infty$ è uno spazio di Banach. Inoltre:

- se $\operatorname{card} \Gamma = m < \aleph_0$ allora $c_0(\Gamma) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$;
- se $\operatorname{card} \Gamma = \aleph_0$ allora $c_0(\Gamma) = c_0$;
- ogni elemento di $c_0(\Gamma)$ ha supporto al più numerabile.

Siano X_γ ($\gamma \in \Gamma$) spazi di Banach. Allora la loro c_0-somma diretta è lo spazio

$$\left(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)_{c_0}$$

delle funzioni $x\colon \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ tali che $x(\gamma) \in X_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) e $\|x(\cdot)\|_{X_\cdot} \in c_0(\Gamma)$. Nella norma

$$\|x\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|_{X_\gamma}$$

esso è uno spazio di Banach.

Proposizione 6.1. *Sia Γ un insieme non vuoto.*

(i) *Lo spazio $c_0(\Gamma)$ è poliedrale.*
(ii) *Se X_γ ($\gamma \in \Gamma$) sono spazi poliedrali allora anche la loro c_0-somma diretta $\left(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)_{c_0}$ è poliedrale.*
(iii) *Se gli spazi $X_1, \dots, X_m$ sono poliedrali allora anche la loro ℓ_1-somma diretta $(\bigoplus_{i=1}^m X_i)_{\ell_1}$ è poliedrale.*

Dimostrazione. (i) Sia Γ infinito (altrimenti $c_0(\Gamma) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$). Sia $L \subset c_0(\Gamma)$ un sottospazio di dimensione finita. Allora esiste un sottoinsieme infinito numerabile $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tale che $x|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \equiv 0$ per ogni $x \in L$. Possiamo quindi considerare L come sottospazio di $c_0(\Gamma_0) = c_0$. Il resto segue dalla Proposizione 2.3.

(ii) Siano $u, v \in \left(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right)_{c_0}$ linearmente indipendenti, $L = \operatorname{span}\{u, v\}$. Siccome l'unione dei supporti di u e v è al più numerabile, possiamo ridurci al caso di $u, v \in \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)_{c_0}$. Inoltre, considerando $Y_n := \operatorname{span}\{u(n), v(n)\} \subset X_n$ ($n \in \mathbb{N}$), possiamo ridurci al caso di X_n (poliedrale e) di dimensione al più 2 per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso, il duale di $Z := \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)_{c_0}$ è lo spazio $Z^* = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n^*\right)_{\ell_1}$, ed è un facile esercizio dimostrare che

$$\operatorname{ext} B_{Z^*} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

dove $E_n = \{z^* \in Z^* :\ z(n) \in \operatorname{ext} B_{X_n^*},\ z(k) = 0 \text{ per } k \neq n\}$ è finito per ogni n. Ne segue che Z ha la proprietà $(*)$ da cui Z, e quindi anche L, è poliedrale (Teorema 2.5).

(iii) Siano $u, v \in (\bigoplus_{i=1}^m X_i)_{\ell_1}$, $L = \operatorname{span}\{u, v\}$. Come nel punto (ii), possiamo supporre che $\dim X_i \leq 2$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$. Ma allora $Z := (\bigoplus_{i=1}^m X_i)_{\ell_1}$ è poliedrale perché gli X_i^* ($1 \leq i \leq m$) sono poliedrali e $Z^* = (\bigoplus_{i=1}^m X_i^*)_\infty = (\bigoplus_{i=1}^m X_i^*)_{c_0}$. $\square$

7. Operatore di Talagrand

In questa sezione, presentiamo una condizione sufficiente affinché uno spazio di Banach sia isomorfamente poliedrale.

Definizione 7.1 ([8])**.** Sia X uno spazio di Banach. Diciamo che X *ammette un operatore di Talagrand* se esistono una boundary $\mathcal{B} \subset S_{X^*}$, un insieme non vuoto M e un operatore continuo lineare $T\colon X \to c_0(\mathcal{B} \times M)$ tale che

$$\forall\, x \in S_X \;\exists\, (b, m) \in \mathcal{B} \times M \;:\quad b(x) = 1,\; (Tx)(b, m) \neq 0.$$

Se tale definizione è soddisfatta con $\operatorname{card} M = 1$, possiamo ovviamente omettere l'insieme M; in tal caso, $T\colon X \to c_0(\mathcal{B})$ e per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste un $b \in \mathcal{B}$ tale che $b(x) = \|x\|$ e $(Tx)(b) \neq 0$. Chiameremo tale operatore un operatore di Talagrand *semplice*.

Proposizione 7.2 ([8])**.** *Se X ammette un operatore di Talagrand allora X è isomorfo ad uno spazio con la proprietà $(*)$. In particolare, X è isomorfamente poliedrale.*

Dimostrazione. Siano $M, \mathcal{B}, T$ come nella Definizione 7.1. Allora l'operatore aggiunto di T è del tipo $T^*\colon \ell_1(\mathcal{B} \times M) \to X^*$. Denotando con $e^*_{(b,m)}$ il funzionale della base canonica di $\ell_1(\mathcal{B} \times M)$ corrispondente alla coordinata (b, m), definiamo

$$\mathcal{C} = \{b \pm T^* e^*_{(b,m)} :\ b \in \mathcal{B},\ m \in M\}.$$

Ricordiamo che A' denota l'insieme dei punti di accumulazione di A in (X^*, w^*). Il fatto che $\{e^*_{(b,m)} : (b, m) \in \mathcal{B}\times M\}' = \{0\}$ in $\ell_1(\mathcal{B}\times M) = c_0(\mathcal{B}\times M)^*$, implica che

$$\{T^* e^*_{(b,m)} : (b, m) \in \mathcal{B} \times M\}' = \{0\} \quad \text{in } X^*. \tag{5}$$

Per $x \in X$ definiamo

$$|||x||| = \sup_{g \in \mathcal{C}} g(x)$$

e osserviamo che

$$|||x||| = \sup_{b \in \mathcal{B}} \left\{ b(x) + \sup_{m \in M} |(Tx)(b, m)| \right\}. \tag{6}$$

Ora, dalla definizione di T otteniamo facilmente che

$$|||x||| > \|x\| \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Chiaramente, $|||\cdot|||$ è una norma su X. Inoltre, è facile vedere che

$$\|x\| \le |||x||| \le (1 + \|T^*\|)\|x\| = (1 + \|T\|)\|x\| \quad (x \in X),$$

per cui $|||\cdot|||$ è una norma equivalente. Proseguiamo in due passi.

(a) Dimostriamo che l'insieme $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C} \cap S_{(X^*, |||\cdot|||)}$ è una boundary per $|||\cdot|||$. Chiaramente

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C} \subset B_{(X^*, |||\cdot|||)}.$$

Sia $x \in X$ tale che $|||x||| = 1$, e sia $(\bar{b}, \bar{m}) \in \mathcal{B} \times M$ tale che $\bar{b}(x) = \|x\|$ e $(Tx)(\bar{b}, \bar{m}) \neq 0$. Esistono insiemi finiti $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ e $M_0 \subset M$ tali che $(\bar{b}, \bar{m}) \in \mathcal{B}_0 \times M_0$ e

$$\sup_{(b,m) \in \mathcal{B} \times M} |(Tx)(b,m)| = \max_{(b,m) \in \mathcal{B}_0 \times M_0} |(Tx)(b,m)|.$$

Ora (6) ci dà

$$1 = |||x||| \leq \bar{b}(x) + \max_{(b,m) \in \mathcal{B}_0 \times M_0} |(Tx)(b,m)|$$

$$\max_{b \in \mathcal{B}_0} \left\{ b(x) + \max_{m \in M_0} |(Tx)(b,m)| \right\} \leq |||x||| = 1.$$

Di conseguenza, esiste $g_0 \in \mathcal{C}$ tale che $g_0(x) = 1$, il che implica che $\mathcal{C}_1$ è una boundary per la nuova norma.

(b) Dimostriamo che $(X, |||\cdot|||)$ ha la proprietà $(*)$, utilizzando Lemma 3.5. Sia $g \in \mathcal{C}_1' \subset \mathcal{C}'$. Grazie al fatto (5), $g \in \mathcal{B}' \subset B_{X^*}$. Se $|||x||| = 1$, abbiamo

$$g(x) \leq \|x\| < |||x||| = 1.$$

La dimostrazione è completa. □

Osservazione 7.3. *Ogni multiplo di un operatore di Talgrand è ovviamente un operatore di Talagrand. Dalla dimostrazione del Teorema 7.2 ora segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, la norma richiesta può essere costruita ε-equivalente alla norma iniziale, cioè,*

$$\|x\| \leq |||x||| \leq (1+\varepsilon)\|x\| \quad \textit{per ogni } x \in X.$$

Come corollario otteniamo ora una dimostrazione alternativa dell'implicazione principale nel Teorema 5.1.

Corollario 7.4 (Teorema 5.1, $(iii) \Rightarrow (i)$)**.** *Ogni spazio di Banach X con una boundary numerabile è isomorfo ad uno spazio con la proprietà $(*)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X^*}$ una boundary numerabile per X. Fissiamo una successione $\{\varepsilon_n\} \subset (0, +\infty)$ tale che $\varepsilon_n \to 0$, e definiamo $T \colon X \to c_0$ con

$$(Tx)(n) = \varepsilon_n b_n(x).$$

Allora T è un operatore di Talagrand semplice per X (infatti, $c_0(\mathcal{B}) = c_0$), e il resto segue dal Teorema 7.2. □

8. Spazi $C(K)$

Consideriamo ora la poliedralità degli spazi $C(K)$. Per semplicità, introduciamo la seguente **convenzione**:

in tutta questa sezione, la parola "compatto"
significa "compatto infinito di Hausdorff".

Se un compatto K consiste solo di una successione convergente di punti insieme al suo limite, in realtà $C(K) = c$ e quindi non è poliedrale ma è isomorfamente poliedrale (essendo isomorfo a c_0).

Iniziamo con un risultato negativo. Un compatto K si dice *scattered* se ogni suo sottoinsieme ha almeno un punto isolato.

Teorema 8.1. *Sia K un compatto.*

(i) *Lo spazio $C(K)$ non è poliedrale.*
(ii) *Se K non è scattered allora $C(K)$ non è isomorfamente poliedrale.*

Dimostrazione. È ben noto (si veda, ad es., [24, Proposition 12]) che $C(K)$ è Asplund se e solo se K è scattered. Di consegeunza, (ii) segue dal Teorema 4.8(c).

Per completare la dimostrazione, rimane da dimostrare (i) per K non scattered. Tale compatto K ha necessariamente infiniti punti isolati (esercizio!). Sia $\{t_n\}$ una successione di punti isolati distinti di K. Per ogni $x = (x_n) \in c$, poniamo $x_\infty = \lim_n x_n$ e definiamo una funzione $Tx\colon K \to \mathbb{R}$ con la formula

$$(Tx)(t) = \begin{cases} x_n & \text{se } t = t_n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ x_\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile vedere che ciò definisce un'isometria lineare $T\colon c \to C(K)$. Quindi $C(K)$ contiene c che non è poliedrale (Esempio 2.6). □

Osservazione 8.2. *Dato un compatto K, i punti di K possono essere visti come elementi di $C(K)^*$ tramite la formula*

$$t(x) := x(t) \qquad (t \in K,\ x \in C(K)).$$

(In realtà, identifichiamo ogni $t \in K$ con la rispettiva misura di Dirac δ_t.) In questo modo, $K \cup (-K) \subset S_{C(K)^*}$ è una boundary per $C(K)$.

Proposizione 8.3. *Se K è un compatto numerabile allora $C(K)$ è isomorfamente poliedrale.*

Dimostrazione. Secondo l'Osservazione 8.2, $C(K)$ ha una boundary numerabile e possiamo applicare Corollario 7.4. □

Se $\alpha > 0$ è un ordinale, allora l'intervallo $I := [0, \alpha]$ di ordinali è un compatto nella topologia standard in cui una base di intorni di $\gamma_0 \in (0, \alpha]$ è la famiglia degli intervalli intervalli “semi-aperti” $(\xi, \gamma_0]$ con $0 \le \xi < \gamma_0$, e il punto 0 è un punto isolato. È facile vedere che I è scattered.

La dimostrazione originale del seguente teorema contiene implicitamente la costruzione di un operatore di Talagrand. Quella qui presentata è stata presa da [8].

Teorema 8.4 (Fonf [7])**.** *Per ogni ordinale $\alpha > 0$, lo spazio $C[0, \alpha]$ è isomorfamente poliedrale.*

Dimostrazione. Poniamo $I := [0, \alpha]$. Per ogni $x \in C(I)$, consideriamo la funzione

$$(7) \qquad Tx\colon I \to \mathbb{R}, \quad (Tx)(\xi) = \begin{cases} x(\xi) - x(\xi+1) & \text{se } \xi < \alpha, \\ x(\alpha) & \text{se } \xi = \alpha. \end{cases}$$

Supponiamo che, per qualche $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$E_\varepsilon := \{\xi \in I \setminus \{\alpha\} : |x(\xi) - x(\xi+1)| \ge \varepsilon\}$$

sia infinito. In quel caso, esso ha un punto di accumulazione $\beta \in I$ il che contraddice la continuità di x in β. Ciò dimostra, che (7) definisce un operatore continuo lineare $T\colon I \to c_0(I)$. Inoltre, se $x \ne 0$ e $\xi \in I$ è il massimo punto in cui $|x(\xi)| = \|x\|$, allora $Tx \ne 0$. L'Osservazione 8.2 immediatamente implica che $C(I)$ ammette un operatore di Talagrand semplice, e il resto segue dal Teorema 7.2. $\square$

Il seguente teorema non può essere dimostrato usando Teorema 7.2 (si veda [8, p. 455]).

Teorema 8.5 ([8, Theorem 11])**.** *Sia K un compatto σ-discreto, cioè, unione numerabile di insiemi (relativamente) discreti. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ lo spazio $C(K)$ ammette un rinormamento ε-equivalente (alla norma standard) con la proprietà $(*)$. In particolare, $C(K)$ è isomorfamente poliedrale.*

Osservazione 8.6. Ricordiamo la definizione degli insiemi derivati. Denotando con E' l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme E, possiamo definire l'insieme derivato $E^{(\alpha)}$ di E per ogni ordinale α, procedendo per induzione transfinita come segue.

Poniamo $E^{(0)} = E$. Supponiamo che $\alpha > 0$ e che $E^{(\beta)}$ è stato già definito per ogni $0 \le \beta < \alpha$. Se $\alpha = \gamma + 1$ poniamo $E^{(\alpha)} = (E^{(\gamma)})'$; se invece α è un ordinale limite poniamo $E^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} E^{(\beta)}$.

Sia ora K un compatto scattered (infinito). Allora $K^{(1)} \ne \emptyset$; inoltre, se $K^{(\alpha)}$ è infinito allora $K^{(\alpha+1)}$ è un sottoinsieme proprio di $K^{(\alpha)}$. Quindi, esiste il minor cardinale κ con $K^{(\kappa)}$ finito (in tal caso $K^{(\kappa+1)} = \emptyset$), e gli insiemi

$$K^{(\alpha)} \qquad (0 \le \alpha \le \kappa)$$

sono a due a due distinti e inscatolati in modo decrescente. Ne segue, ad esempio, che

$$\operatorname{card} \kappa \leq \operatorname{card} K.$$

Ora, sia K un compatto scattered con $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ (dove ω_1 è il primo ordinale infinito non numerabile). Allora $K^{(\alpha)} = \emptyset$ per qualche $\alpha < \omega_1$ e quindi

$$K = \bigcup_{\beta<\alpha} \left(K^{(\beta)} \setminus K^{(\beta+1)}\right)$$

è σ-discreto, e quindi $C(K)$ è isomorfamente poliedrale.

Teorema 8.7 ([8, Corollary 13])**.** *Siano $K_1, \ldots, K_m$ spazi compatti tali che, per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $1 \leq i \leq m$, lo spazio $C(K_i)$ ammetta un rinormamento ε-equivalente con la proprietà $(*)$. Allora lo stesso vale anche per lo spazio*

$$C(K_1 \times \cdots \times K_m).$$

Dai risultati precedenti segue che le ipotesi del Teorema 8.7 saranno soddisfatte se, per ogni i, K_i è σ-discreto oppure $C(K_i)$ ammette un operatore di Talgrand (ad es., $K_i = [0, \alpha]$ per qualche ordinale α).

9. Ulteriori risultati

Ricordiamo che un insieme $\{e_i\}_{i\in I}$ è una *base di Schauder incondizionata* per X se per ogni $x \in X$ esiste un unico sistema $\{\alpha_i^x\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ tale che

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i^x e_i$$

e la serie converge incondizionatamente. (Necessariamente l'insieme $\{i : \alpha_i \neq 0\}$ è al più numerabile.) È ben noto che esiste un unico sistema $\{e_i^*\}_{i\in I} \subset X^*$ tale che $\alpha_i^x = e_i^*(x)$ per ogni x.

Per un insieme $E \subset I$ denotiamo $P_E x = \sum_{i\in E} \alpha_i e_i$.

Una base incondizionata $\{e_i\}_{i\in I}$ viene detta *monotona* se

$$\|P_F\| = 1 \quad \text{per ogni insieme finito } F \subset I.$$

Teorema 9.1 ([8, Theorem 24])**.** *Sia X uno spazio di Banach con una base incondizionata monotona $\{e_i\}_{i\in I}$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista un insieme finito $F_x \subset I$ tale che*

$$\|x\| = \|P_{F_x} x\|.$$

Allora X è isomorfamente poliedrale.

Teorema 9.2 (si veda [9, Corollary 13])**.** *Sia X una spazio di Banach avente una boundary $\mathcal{B} \subset S_{X^*}$ che può essere ricoperta con una successione di insiemi compatti (nella norma). Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un rinormamento ε-equivalente di X con la proprietà $(*)$. In particolare, X è isomorfamente poliedrale.*

Il seguente teorema mostra alcune proprietà “strane” che uno spazio poliedrale separabile può avere.

Teorema 9.3. *Per ciascuna delle seguenti tre condizioni esiste uno spazio poliedrale separabile X che la soddisfa.*

(i) X^* *non è saturato da copie isomorfe di* ℓ_1*;* [11].
(ii) X *ha un quoziente isomorfo a* ℓ_2*;* [11].
(iii) $\operatorname{ext} B_{X^*}$ *non è ricopribile con una successione di bolle chiuse di raggi minori di* 1 *e tendenti a* 0*; in particolare,* $\operatorname{ext} B_{X^*}$ *non è numerabile;* [17].

10. Qualche problema aperto

Secondo la mia conoscenza, i seguenti problemi sono aperti.

Problema 10.1 (Lindenstrauss [15])**.** *Uno spazio poliedrale infinito dimensionale X può soddisfare*

$$B_X = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ext} B_X)\ ?$$

Commento 10.2. Se il Problema 10.1 ha risposta affermativa, allora tale spazio poliedrale X esiste anche separabile.

Dimostrazione del commento. Sia X uno spazio poliedrale infinito dimensionale con

$$B_X = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ext} B_X). \tag{8}$$

Sia $E_1 \subset \operatorname{ext} B_X$ un insieme infinito numerabile. Siano: $Y_1 := \overline{\operatorname{span}}\, E_1$; $D_1 \subset S_{Y_1}$ un insieme numerabile denso. Dalla (8) segue facilmente che esiste un insieme numerabile $E_2 \subset \operatorname{ext} B_X$ tale che $E_2 \supset E_1$ e $D_1 \subset \overline{\operatorname{conv}}\, E_2$.

E di nuovo, siano $Y_2 := \overline{\operatorname{span}}\, E_2$; $D_2 \subset S_{Y_2}$ un insieme numerabile denso. Dalla (8), esiste un insieme numerabile $E_3 \subset \operatorname{ext} B_X$ tale che $E_3 \supset E_2$ e $D_2 \subset \overline{\operatorname{conv}}\, E_3$.

Procedendo induttivamente, si ottiene una successione crescente di sottospazi separabili Y_n di X e una successione crescente di sottoinsiemi numerabili E_n di $\operatorname{ext} B_X$. Definiamo

$$Y = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n}\ , \qquad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\ .$$

Dati $y \in S_Y$ e $\varepsilon > 0$, esistono $m \in \mathbb{N}$ e $y' \in S_{Y_m}$ tali che $\|y - y'\| < \varepsilon$. Esiste $d \in D_m$ con $\|y' - d\| < \varepsilon$; esso soddisfa $d \in \overline{\operatorname{conv}}\, E_{m+1} \subset \overline{\operatorname{conv}}\, E$. Dall'arbitrarietà di ε segue che $y \in \overline{\operatorname{conv}}\, E$. Siccome $E \subset \operatorname{ext} B_Y$, otteniamo immediatamente che $B_Y = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ext} B_Y)$. Il sottospazio Y è chiaramente separabile. □

Problema 10.3 (V.P. Fonf). *È possibile rinormare ogni spazio poliedrale separabile X in modo che* $\operatorname{ext} B_{X^*}$ *sia numerabile? (Equivalentemente* [10], *è possibile rinormare tale X in modo che ogni $f \in (\operatorname{ext} B_{X^*})'$ abbia norma strettamente minore di 1?)*
(Secondo il Teorema 9.3(iii), $\operatorname{ext} B_{X^*}$ può non essere numerabile nella norma di partenza.)

Problema 10.4. *Sia X uno spazio poliedrale non separabile.*

(a) *X ammette sempre un rinormamento con la proprietà $(*)$?*
(b) *X ammette sempre un rinormamento poliedrale nel quale ogni punto di S_X appartiene solo ad un numero finito di facce massimali?*

(Per spazi poliedrali *separabili*, (a) ha risposta affermativa [Teorema 5.1], come anche (b) [ciò segue, poi, dal Lemma 5.8].)

References

[1] A. Barvinok, *A Course in Convexity*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry. Second edition*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 68, Notas de Matemática , 86, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[3] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces–Sselected topics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[4] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984.

[5] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathmatiques de la SMC, Springer, New York, 2011.

[6] V.P. Fonf, *The massiveness of the set of extreme points of the conjugate ball of a Banach space and polyhedral spaces* (Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), 91–92.

[7] V.P. Fonf, *A property of spaces of continuous functions on segments of ordinals*, Sibirsk. Mat. Zh. **21** (3) (1980) 230–232; English transl. in: Siberian Math. J. **6** (1980).

[8] V.P. Fonf, A.J. Pallares, R.J. Smith and S. Troyanski, *Polyhedral norms on non-separable Banach spaces*, J. Funct. Anal. **255** (2008), 449–470.

[9] V.P. Fonf, A.J. Pallares, R.J. Smith and S. Troyanski, *Polyhedrality in pieces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 247–264.

[10] V.P. Fonf and L. Veselý, *Infinite-dimensional polyhedrality*, Canad. J. Math. **56** (2004), 472–494.

[11] I. Gasparis, *New examples of c_0-saturated Banach spaces*, Math. Ann. **344** (2009), 491–500.

[12] V. Klee, *Some characterizations of convex polyhedra*, Acta Math. **102** (1959), 79–107.

[13] V. Klee, *Polyhedral sections of convex bodies*, Acta Math. **103** (1960), 243–267.

[14] D.H. Leung, *Some isomorphically polyhedral Orlicz sequence spaces*, Israel J. Math. **87** (1994), 117–128.

[15] J. Lindenstrauss, *Notes on Klee's paper "Polyhedral sections of convex bodies"*, Israel J. Math. **4** (1966), 235–242.
[16] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I. Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
[17] R. Livni, *On extreme points of the dual ball of a polyhedral space*, Extracta Math. **24** (2009), 243–249.
[18] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.
[19] W.B. Moors, *An elementary proof of James' characterization of weak compactness*, Bull. Aust. Math. Soc. **84** (2011), 98–102.
[20] R.R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. Second Edition*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[21] G. Rodé, *Superconvexität und schwache Kompaktheit*, Arch. math. **36** (1981), 62–72.
[22] E. Odell and T. Schlumprecht, *The distortion problem*, ActaMath. **173** (1994), 259–281.
[23] H.P. Rosenthal, *The Banach spaces $C(K)$*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, 1547–1602, North-Holland, Amsterdam, 2003.
[24] D. Yost, *Asplund spaces for beginners*, Selected papers from the 21st Winter School on Abstract Analysis (Podebrady, 1993), Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **34** (1993), 159–177 [http://dml.cz/dmlcz/702006].
[25] L. Veselý, *Boundary of polyhedral Banach spaces: an alternative proof*, Extracta Math. **15** (2000), 213–217.