

Programma

Teoria delle Categorie

a.a. 2010/11

Prof. S. Mantovani

Categorie e Funtori. Monoidi e preordini. Categoria duale. Funtori covarianti e controvarianti. Isomorfismi. Trasformazioni e isomorfismi naturali. Equivalenze. Dualita' di Boole. Doppio duale k -spazi vettoriali. Ogni gruppo e' isomorfo al suo duale. Gruppoidi.

Funtori pieni, fedeli essenzialmente suriettivi. Rapporto con equivalenze usando assioma di scelta. Equivalenze preservano finale e iniziale. Esempi di funtori pieni e fedeli, ma non equivalenze.

Proprietà universali. Prodotto e coprodotto, gruppo libero con le proprietà universali.

Prodotto tensore.

Funtori rappresentabili. Caso M -set e prefasci.

Lemma di Yoneda con dimostrazione e esempi nei casi precedenti. Conseguenze di Yoneda.

Limiti e colimiti. Monomorfismi e epimorfismi. Esempi di mono non iniettivo e epi non suriettivi, categorie bilanciate. Proprietà di mono e epi. Concetto di limite e colimite. Diagrammi, coni e coconi. Equalizzatori e coequalizzatori. Mono e epi regolari. Categorie complete e finitamente complete.

Aggiunzioni. Proprietà di aggiunzione di un'equivalenza: calcolo esplicito della t.n. tra hom -set.

Definizione di adjoint situation con iso naturale sugli hom -set. Passaggio alla proprietà universale (senza dim). Aggiunzione via proprietà universale e via identità triangolare. Equivalenza tra le tre definizioni. Aggiunti ds e sin al dimenticante da Top . Caso inclusione abeliani nei gruppi e suo aggiunto sin . Aggiunzione con aggiunto pieno e fedele e unita' iso. Equivalenze e aggiunte. Preservazione dei limiti per aggiunti ds . Rappresentabili e aggiunti ds . Oggetti cartesiani e categorie cartesiane chiuse. Aggiunzioni nei preordini.

Monadi. Monade del monoide libero. Monadi. Algebre per una monade. Categoria delle algebre.

Algebre libere. funtore dimenticante e funtore libero associati ad una monade. Dalle monadi alle aggiunzioni e dalle aggiunzioni alle monadi. Funtore di confronto. Funtore monadico. Proprietà dei funtori monadici. Esempi di funtori monadici e non.

Categoria $\text{End}(C)$ degli endofuntori e monade come oggetto monoide in $\text{End}(C)$.

Categorie monoidali. Categorie monoidali strette: $\text{End}(C)$ e insiemi finiti totalmente ordinati.

Categorie monoidali e teorema di coerenza. Esempi: categorie con prodotto, con coprodotto, r -moduli con prodotto tensore. Monoidi in una monoidale. Esempi: monade come monoide in $\text{End}(C)$, anello=monoide in $(\text{Ab}, \text{tensore}, Z)$, monoidi commutativi come monoidi in Mon , categorie monoidali strette come monoidi in CAT .

Funtori monoidali lax, strong e strict. Trasformazioni monoidali. Equivalenze ed aggiunzioni monoidali. Monoidali intrecciate e monoidali simmetriche. Monoidali chiuse.

Ab è monoidale chiusa rispetto al prodotto tensore, ma non è cartesiana chiusa..

Topos elementari. Esponenziali per prefasci. Caso M -sets.

Classificatore per sottoggetti. Topos come categorie di insiemi variabili. Classificatore per sottoggetti per prefasci. Ab non ha classificatore per sottoggetti. Definizione di topos elementare.

Topos di Grothendieck. Fasci su uno spazio topologico. Spazi etale ed equivalenza con $\text{Sh}(X)$.

Localizzazioni.

Topologie di Grothendieck su un sito e fasci su un sito. Localizzazioni di Prefasci e topos di Grothendieck. Teorema di Giraud. Somme universali e disgiunte. Ogni topos con 0-oggetto e' banale.

Prefasci di abeliani. Oggetti abeliani interni.

Categorie regolari ed esatte. Relazioni d'equivalenza interne. Kernel pair. Equivalenze non effettive nei liberi da torsione. Epimorfismi estremali, forti, regolari, spezzanti e relazioni tra loro. Proprieta' epi estremali in una categoria lex. Fattorizzazione (epi estrema, mono). Definizione categoria regolare via epi estremali. In una categoria regolare epi regolari coincidono con epi estremali. Definizione alternativa di regolarità con coequalizzatori. Top non e' regolare. Categorie esatte. I gruppi topologici sono una cat. regolare ma non esatta. Categorie di Mal'cev.

Categorie additive. Ab-Categorie. Biprodotti. Categorie additive. Proprieta' di mono e epi. Unicita' struttura additiva.

Categorie abeliane. Una categoria abeliana e' finitamente completa e cocompleta, ha una struttura additiva, ha tutte le relazioni di equivalenza effettive ed e' regolare.

Una categoria additiva e Barr-esatta e' abeliana. Omologia in categorie abeliane. Lemmi omologici.

TESTI:

S. Mac Lane: Categories for the working mathematician, Springer, 1997

J. Adamek, H. Herrlich, G. Strecker: Abstract and concrete categories, Wiley Interscience Publ. 1990. disponibile online:

<http://www.itl.cs.tu-bs.de/~adamek/AHS.pdf>

F. Borceux: Handbook of categorical algebra, 1-2-3, Cambridge University Press, 1994

Mac Lane, Saunders; Moerdijk, Ieke Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory. Corrected reprint of the 1992 edition. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.