

IX Ciclo SILSIS - a.a. 2008/09

Indirizzo SN

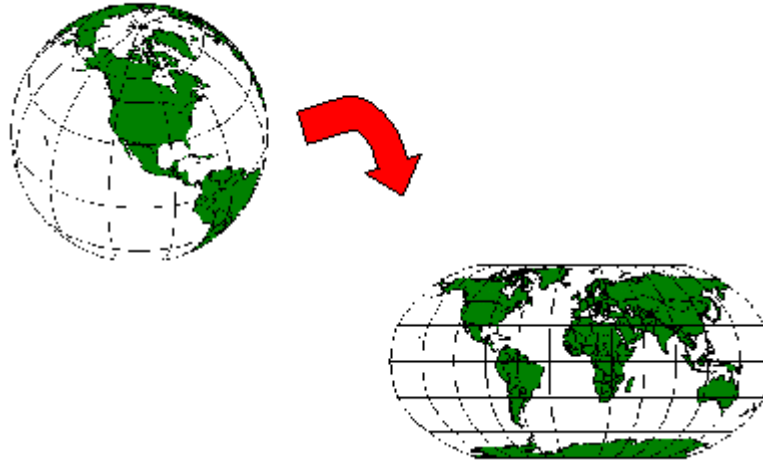
Classe 59A

Lucidi del Laboratorio di Carte

Prof. S. Mantovani

## IL "PROCESSO CARTOGRAFICO"

Generalmente l'output di un processo cartografico è un disegno (carta) del territorio realizzato in un sistema di coordinate piane:



i punti sulla carta devono essere in corrispondenza biunivoca con quelli della superficie fisica del territorio rappresentato, approssimata con delle opportune superfici di riferimento (ellissoide in generale, per semplicità noi useremo la sfera), quindi una carta è data da una funzione biunivoca tra la superficie sferica (o una sua parte) ed una parte di piano.

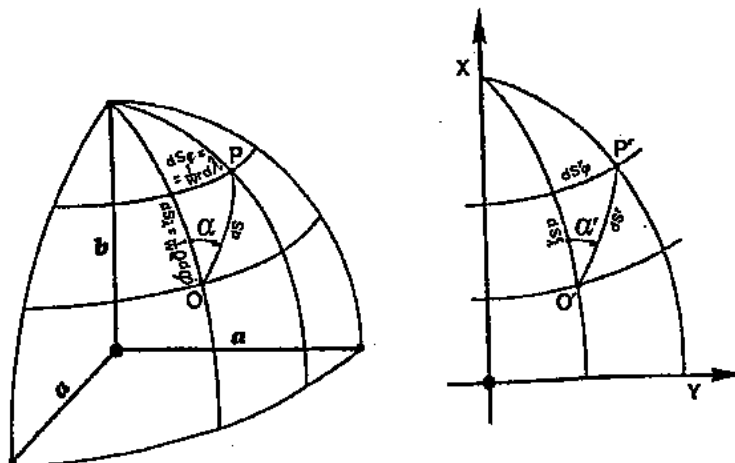
Per costruire tale funzione, innanzitutto dobbiamo essere in grado di individuare i punti sulla superficie sferica che rappresenta la superficie terrestre attraverso un'opportuna scelta di coordinate, per esempio la latitudine e la longitudine.

La corrispondenza tra superficie di riferimento (superficie sferica) e superficie di proiezione (piano) è stabilita quando è fissato il modo di calcolare, per ogni punto della sfera espresso in opportune coordinate, la posizione corrispondente sul piano della rappresentazione, in opportune coordinate piane. Essa è data quindi in base a precise relazioni di tipo geometrico e/o matematico, che definiscono le equazioni della carta, cioè le coordinate piane in funzione delle coordinate scelte sulla sfera.

Se sul piano della rappresentazione si sceglie come riferimento un sistema cartesiano  $(x,y)$  e  $(f,l)$  rappresenta un sistema di coordinate sulla superficie sferica (ad esempio, latitudine e longitudine) le formule di corrispondenza sono:

$$x=x(f,l)$$

$$y=y(f,l)$$



Relativamente alla rappresentazione, la classificazione viene fatta fondamentalemente sul *tipo di proprietà preservate dalla carta*, come vedremo in modo approfondito, ma viene anche considerata la tipologia di generazione, cioè il modo in cui vengono ricavate le equazioni della carta. Relativamente alla generazione le rappresentazioni possono essere derivate per via

geometrica (vere e proprie proiezioni)

semigeometrica (modifiche analitiche di proiezioni)

analitica (relazioni tra coordinate non ricavate da proiezioni geometriche).

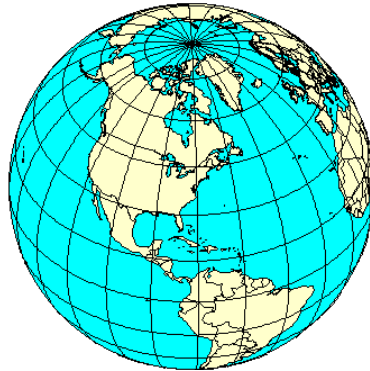
Nel primo caso le proiezioni vengono dette anche *pure*, negli altri due *convenzionali*.

## Latitudine e longitudine

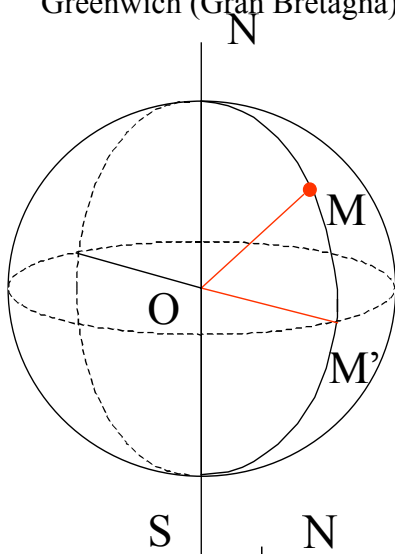
**paralleli** = circonferenze ottenute intersecando la superficie terrestre con piani perpendicolari all'asse terrestre

**meridiani** = circonferenze ottenute intersecando la superficie terrestre con piani passanti per l'asse terrestre.

I paralleli hanno raggio variabile. Il parallelo di raggio massimo è quello ottenuto con il piano passante per il centro della terra e si chiama equatore. Viene assunto come parallelo di riferimento.



I meridiani hanno tutti lo stesso raggio. Non essendoci un meridiano privilegiato, è stato assunto come riferimento un meridiano convenzionalmente scelto: quello passante per la cittadina di Greenwich (Gran Bretagna).



### LATITUDINE DEL PUNTO M

È l'angolo  $MOM'$  (misurato in gradi), dove

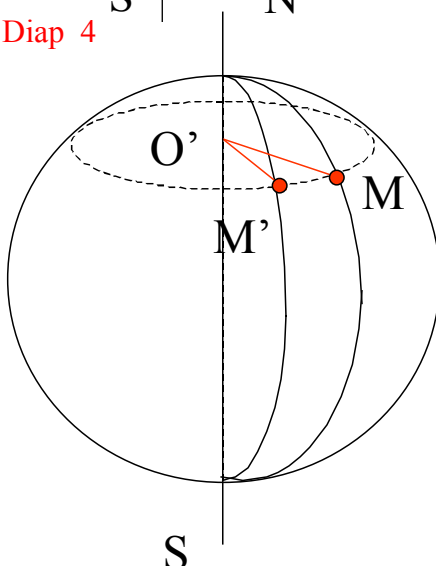
$O$  = centro della terra

$M'$  = intersezione del meridiano passante per  $M$  con l'equatore.

Nell'emisfero a nord dell'equatore si usa il suffisso **NORD**.

Per punti che si trovano nell'emisfero a sud dell'equatore si usa il suffisso **SUD**. La latitudine di Milano è  $\sim 45^\circ$  **NORD**.

Diap 4



### LONGITUDINE DEL PUNTO M

È l'angolo  $MO'M'$  (misurato in gradi):

$O'$  = centro del parallelo passante per  $M$

$M'$  = intersezione del parallelo passante per  $M$  con il meridiano di Greenwich.

Per punti  $M$  che si trovano nell'emisfero a est del meridiano di  $G$ , si usa il suffisso **EST**; per punti che si trovano nell'emisfero a ovest del meridiano di  $G$ , si usa il suffisso **OVEST**. La longitudine di Milano è  $\sim 9^\circ$  **EST**.

# Mappe dalla sfera al piano

Il problema iniziale della cartografia



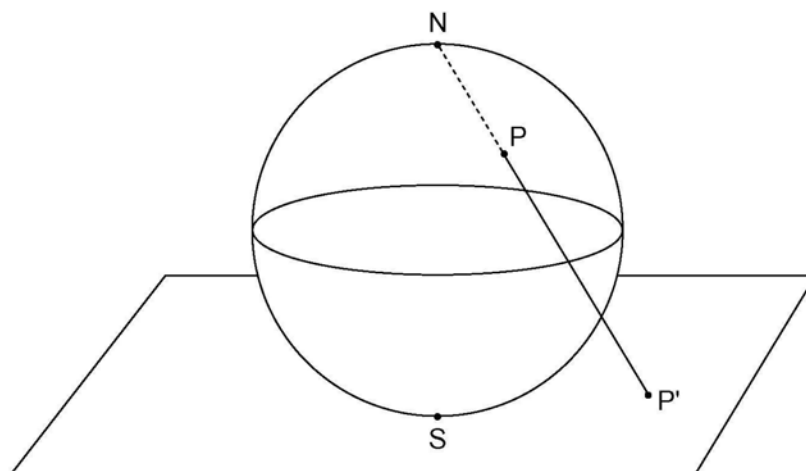
**Early map-making techniques.**

è quello di rappresentare i punti della Terra (del suo modello sferico  $S$ ) su una carta, cioè con punti del piano  $\pi$ , in modo da riconoscere senza ambiguità sulla carta i punti di provenienza. Questo vuol dire innanzitutto costruire una funzione *iniettiva* (o *biunivoca sull'immagine*)

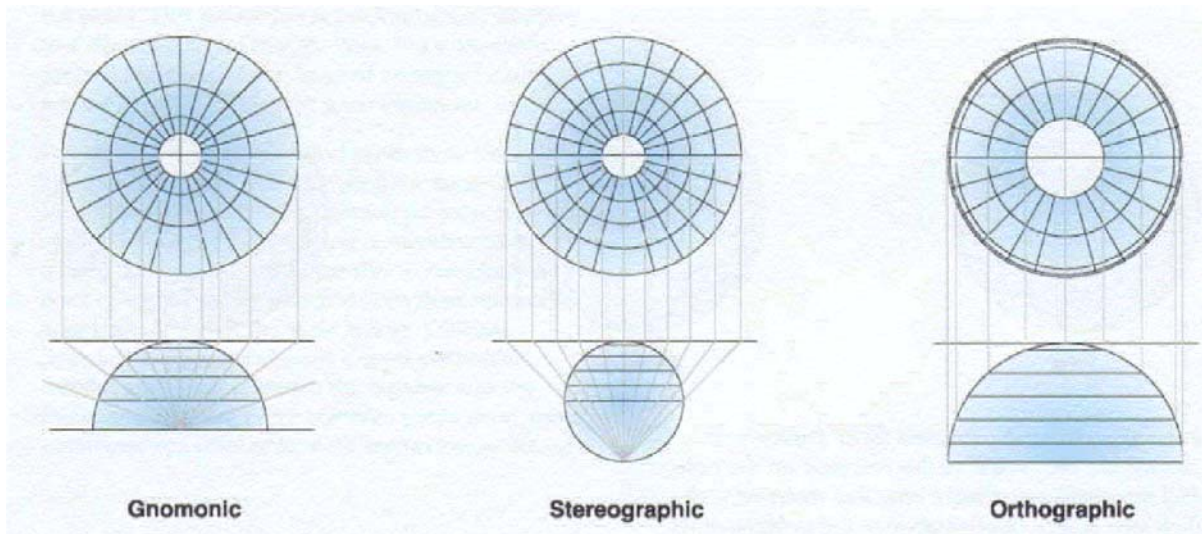
$$f : S \rightarrow \pi, \quad P \in S \leftrightarrow f(P) \in \pi.$$

Dal punto di vista matematico, questo non è un problema, ma il limitarsi a questa richiesta risulta poco significativo dal punto di vista del cartografo perchè una carta costruita con una semplice funzione iniettiva potrebbe non dare alcuna informazione di tipo geometrico.

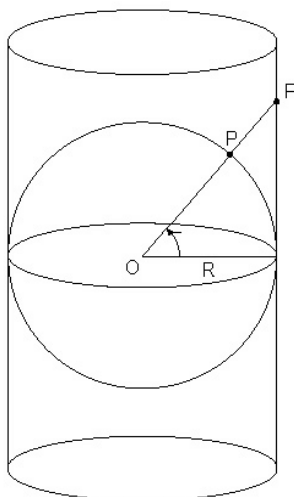
Se chiediamo che  $f$  mandi punti "vicini" in punti ancora "vicini" tra loro, cioè se chiediamo che  $f$  sia *continua*, ci scontriamo con il primo problema, in quanto una mappa continua ed iniettiva dalla sfera al piano non può esistere, per motivi topologici. Questo problema è facilmente risolvibile: basta per esempio togliere un punto ad  $S$  (*proiezione stereografica*):



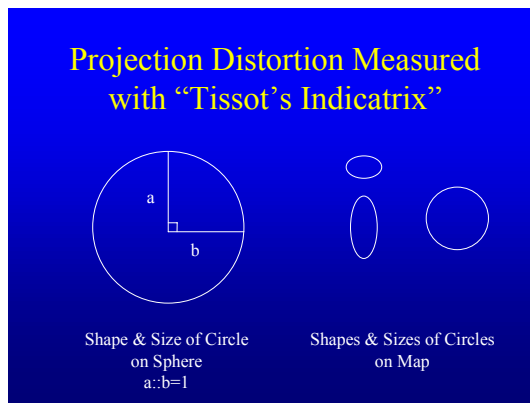
, o mappare sul piano un emisfero per volta (con la proiezione stereografica o con la *proiezione centrale*, o con la *proiezione ortografica*):



oppure togliere 2 punti e mappare su un cilindro (*proiezione cilindrica centrale*):



Problema ben più grosso si ha quando si vuole preservare non solo la struttura topologica ma anche quella *metrica*, cioè una struttura ottenuta assegnando una distanza tra punti con date proprietà. Per secoli si è cercato di trovare una carta geografica che rappresentasse fedelmente le distanze. Il problema fu finalmente risolto nel 1775 da Eulero che dimostrò la non esistenza di tale carta. Quindi una regione della sfera, per quanto piccola, dal punto di vista teorico non potrà mai appiattirsi senza spezzarsi, piegarsi, dilatarsi. Non c'è carta geografica in cui non sia presente qualche distorsione. Uno dei modi per rappresentare le distorsioni è dato dalle *ellissi indicatrici di Tissot*.



Chiaramente dal punto di vista pratico questo riguarda carte che rappresentano superfici abbastanza ampie. Quando rappresentiamo su di un piano piccole superfici, l'errore di approssimazione dovuto alla curvatura terrestre è molto piccolo e quindi possiamo “confondere” la superficie terrestre con un piano. Per piccole superfici l'approssimazione data dal piano tangente è sufficiente. Invece nel rappresentare in piano grandi superfici, avremo sempre delle distorsioni e bisogna quindi scegliere quali aspetti privilegiare e quali trascurare.

Le principali mappe si possono classificare a seconda delle proprietà che hanno in:

- Mappe che preservano gli angoli (dette *conformi*)
- Mappe che preservano i rapporti tra le aree (dette *equivalenti*)
- Mappe che preservano *alcune* distanze (dette *equidistanti*)
- Mappe che preservano *le geodetiche* (mandano archi di cerchio massimo in rette del piano)

I cartografi poi studiano anche carte in cui nessuna proprietà è preservata, ma dove si cerca di minimizzare le deformazioni (*carte compromesso*).

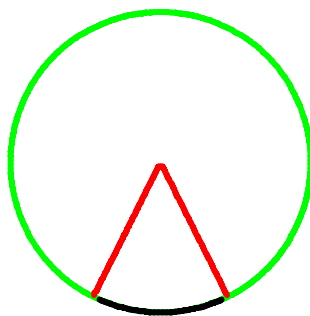
## Perchè non può esistere una carta geografica “perfetta”?

Innanzitutto vale la pena chiarire cosa si intende per carta geografica “perfetta”: una rappresentazione piana di una porzione di superficie terrestre sarebbe perfetta se fosse in scala esatta, cioè, se, a meno di un fattore di scala, tutte le misurazioni fatte sulla superficie terrestre interessata (distanze, angoli, aree, eccetera) dessero lo stesso risultato fatte sulla carta. Dal punto di vista matematico, l'esistenza di una carta perfetta equivale all'esistenza di una *isometria* tra una parte di una superficie sferica e una parte di piano, cioè di una funzione che preserva le distanze. (Un'isometria, preservando le distanze, preserva anche le lunghezze, gli angoli, le aree, le forme: nell'appendice, si ricordano le trasformazioni tra piani e le loro proprietà)

Il problema in questione si traduce nel mostrare l'impossibilità dell'esistenza di una tale isometria. L'ostruzione di fondo nasce dal fatto che la “geometria” (distanze, “rette”, angoli,..) della sfera è sostanzialmente diversa da quella del piano. Un esempio evidente è dato dal fatto che, una volta assegnato il ruolo di “rette” ai cerchi massimi (ruolo di *geodetiche*: i cerchi massimi realizzano sulla sfera quello che le rette realizzano sul piano, cioè il *percorso di minima distanza*), si ha che sulla sfera tutte le “rette” non coincidenti si incontrano in due punti, mentre sul piano due rette distinte si incontrano in un punto o mai.

## Geometria sulla sfera

*Distanze:* Innanzitutto ricordiamo che un *cerchio massimo* è una circonferenza sulla sfera ottenuta intersecandola con un piano passante per il centro della sfera. Dati 2 punti  $A, B$  (non antipodali) sulla sfera, esiste un unico cerchio massimo che li contiene, sul quale  $A$  e  $B$  individuano 2 archi



uno dei quali sottende un angolo al centro  $\alpha$  minore di  $180^\circ = \pi$  radianti. La misura di questo arco (che coincide con  $R\alpha$  se misurata in radianti, dove  $R$  è il raggio della sfera) dà la *distanza tra A e B sulla sfera*.

*Angoli:* Un angolo  $\alpha$  di vertice  $A$  su una sfera è dato dalla parte di superficie sferica compresa tra due archi di cerchi massimi uscenti da  $A$ . La sua misura coincide con quella dell'angolo formato dalle tangenti ai cerchi sul piano tangente in  $A$ .

Avendo introdotto i concetti di rette ed angoli sulla sfera, possiamo andare a vedere come si trasforma sulla sfera la figura geometrica più semplice del piano, il **triangolo**: un triangolo sferico è la parte di superficie sferica compresa tra archi di cerchio massimo unenti tre punti distinti e non "allineati". Se andiamo a sommare i 3 angoli interni ad un triangolo sferico, troviamo un'altra grande differenza rispetto alla geometria piana: *la somma delle misure degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di  $180^\circ$* , come si può facilmente vedere andando a considerare sulla sfera un triangolo con 3 angoli retti!



Non solo: questa somma dipende dall'area del triangolo e dal raggio della sfera! Esattamente si ha che:

$$s = \pi + \frac{\text{Area } T}{R^2}, \text{ dove } R = \text{raggio della sfera}$$

Questo risultato è già sufficiente a mostrarci l'impossibilità di avere un'isometria tra una parte di sfera ed una parte di piano. Infatti una tale ipotetica isometria preserva le distanze, quindi i percorsi di minima distanza=geodetiche, cioè manda archi di cerchio massimo in rette, quindi un triangolo sferico  $T$  in un triangolo piano  $T'$ . Ma le isometrie preservano anche le ampiezze degli angoli, quindi  $T'$  risulterebbe un triangolo piano con 3 angoli la cui somma è maggiore di  $180^\circ$ , e questo nel piano non può esistere.

La natura della differenza tra la geometria della sfera e la geometria del piano sta nella diversa curvatura, che attribuisce ad ogni punto  $P$  di una superficie un numero  $K(P)$  che misura quanto la superficie è curva nelle vicinanze di  $P$ . Nel piano, (che è piatto!), *la curvatura è nulla in tutti i punti*. In ogni sfera, *la curvatura è uguale in tutti i punti ed in tutti i punti è maggiore di zero, ma la curvatura varia da sfera a sfera* in quanto dipende dal raggio: esattamente vale  $K = \frac{1}{R^2}$  (più il raggio è grande, meno la sfera è curva).

## Mappe conformi

Una mappa  $f : S \rightarrow \pi$  è *conforme* quando *preserva gli angoli*, cioè quando

$$f(\widehat{ABC}) = f(A)f(\widehat{B})f(C).$$

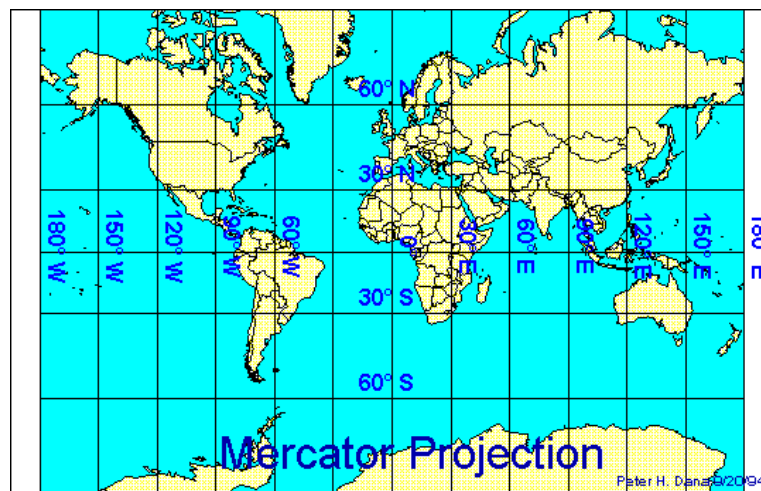
Una mappa conforme agisce come una similitudine a livello infinitesimale, in quanto se  $\Delta ABC$  è un triangolo infinitesimo sulla superficie sferica, si può pensare piano e quindi  $f(\Delta ABC)$ , avendo gli stessi angoli, è simile a  $\Delta ABC$ . Sarà ottenuto cioè dilatando il triangolo iniziale lungo tutte le direzioni dello stesso fattore  $a$  di similitudine.

Una mappa è quindi conforme

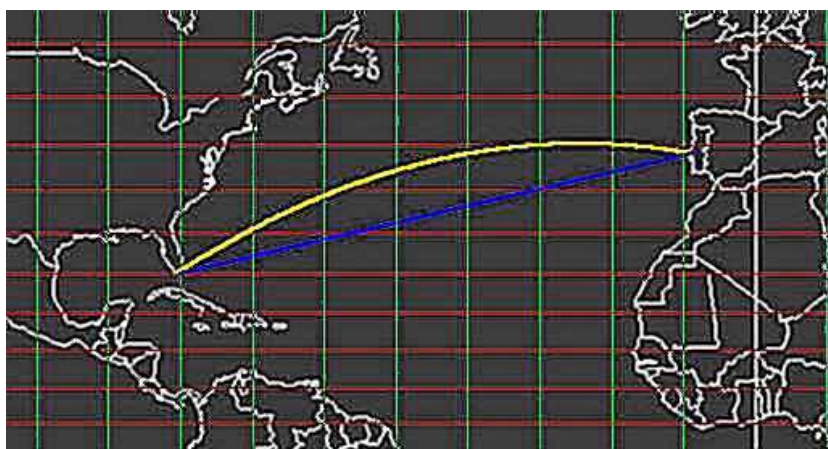
se e solo se la scala in ogni punto è la stessa in ogni direzione, proprietà che viene rappresentata attraverso indicatrici di Tissot che sono circonferenze in ogni punto, con raggio variabile a seconda del parallelo.

Perchè “conforme” se preserva gli angoli? L’aggettivo “conforme” (della stessa forma) deriva dal fatto che, poichè localmente si comporta come una dilatazione, localmente lascia invariata la forma delle figure. Questo non è vero per figure di vaste superfici, in quanto le immagini dei lati di un triangolo di vasta scala non sono assimilabili a segmenti di retta!

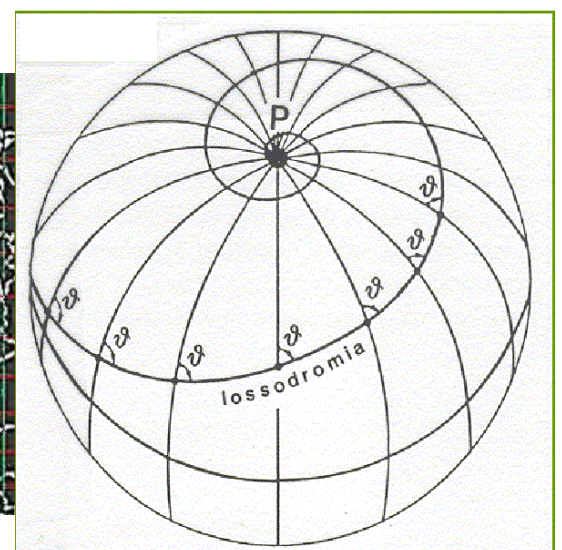
### La carta di Mercatore (1569)



è una carta cilindrica conforme con i meridiani rappresentati da rette verticali e quindi con i paralleli da rette orizzontali (*carta nautica*). È infatti la carta più utile per i navigatori, perchè per avere la rotta da  $A$  a  $B$  basta tracciare sulla carta la retta che li congiunge! Questa retta sulla carta corrisponde ad una curva sulla sfera, detta *lossodromica*, con tangente di direzione costante, cioè l’angolo tra la curva e un meridiano è lo stesso in ogni punto:

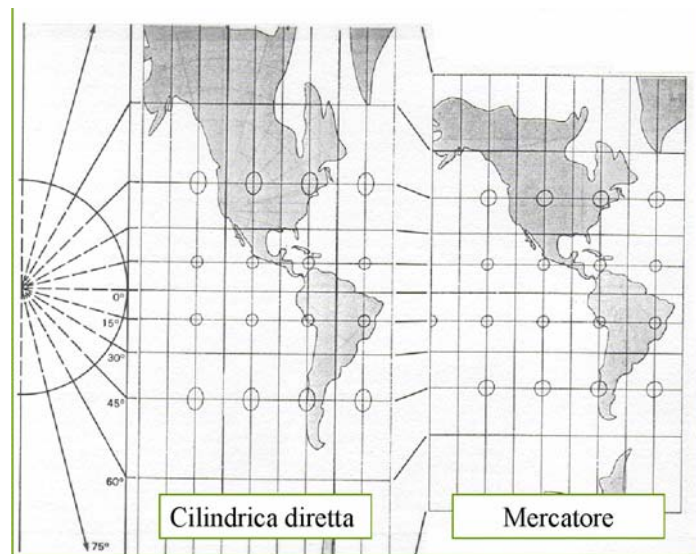


blu: lossodromica, gialla: geodetica



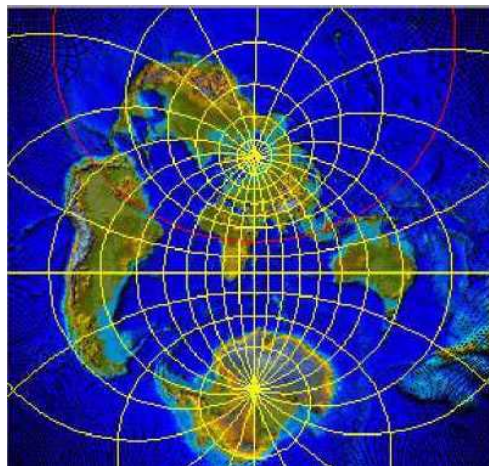
**Proprietà:** la scala in direzione orizzontale (lungo ogni parallelo), è fissa, cioè 3 punti di ugual latitudine separati da distanze uguali sulla Terra sono ugualmente distanziati sulla carta. Questo è

rappresentato da indicatrici di Tissot che risultano circonferenze con lo stesso raggio lungo lo stesso parallelo:



La *proiezione stereografica* è un altro esempio di mappa conforme (ottenuto con un'effettiva proiezione geometrica da un punto  $N$  sulla sfera sul piano tangente nel punto antipodale  $S$ ). La proiezione stereografica ha inoltre la proprietà di *mandare circonferenze sulla sfera in rette o in circonferenze nel piano*. In particolare, se si proietta da un polo, i paralleli si trasformano in circonferenze di centro l'altro polo ed i meridiani si trasformano in rette uscenti da quest'ultimo polo.

Una mappa particolare ottenuta mediante proiezione stereografica è la cosiddetta "Mecca map":

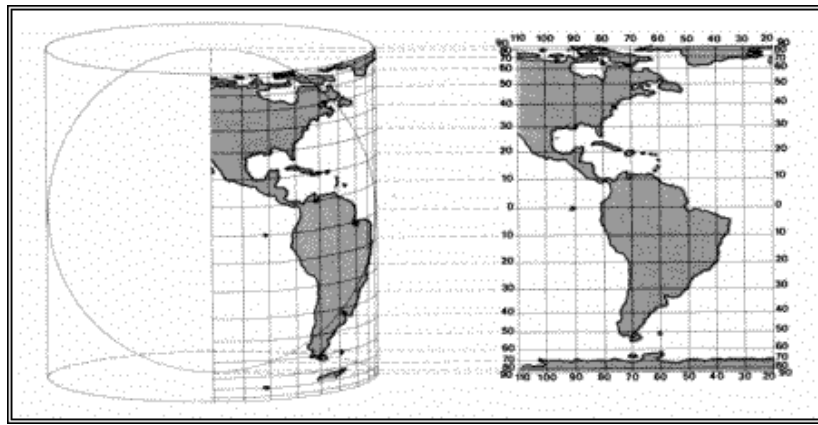


in cui il punto di tangenza è la Mecca, la cui direzione può essere così individuata dai musulmani .

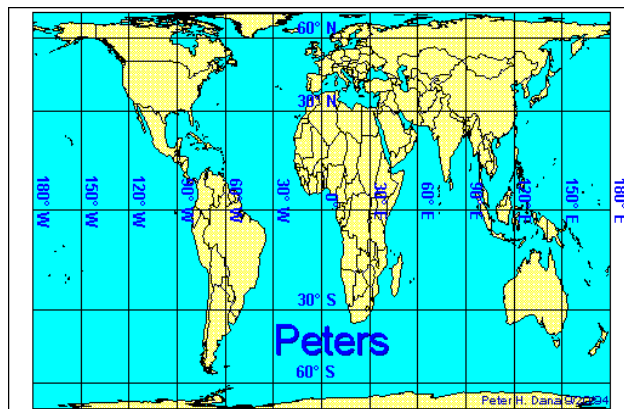
### Mappe equivalenti

Sono mappe che preservano l'area (a meno di un fattore di scala), quindi figure con area uguale sulla sfera hanno proiezioni di uguale area. Questa proprietà risulta particolarmente importante quando si vogliono confrontare fenomeni in relazione con la superficie dei territori (densità di popolazione, estensioni di laghi, di foreste, ect).

Una mappa equivalente è la *proiezione cilindrica ortografica*, una proiezione geometrica nella quale si proiettano i punti della Terra su una superficie cilindrica tangente all'equatore e per tutti i punti situati su ciascun parallelo viene adottato come punto da cui proiettare il centro del parallelo stesso:



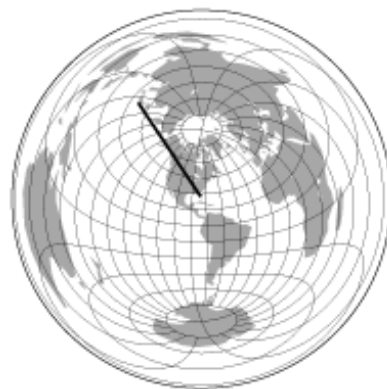
Un'altra mappa equivalente molto conosciuta soprattutto per le sue implicazioni socio-politiche è quella di Arno Peters (1972):



mappa usata come copertina del rapporto Brandt (1980) sui rapporti Nord-Sud. Ci sono anche mappe equivalenti azimutali o coniche.

## Mappe equidistanti

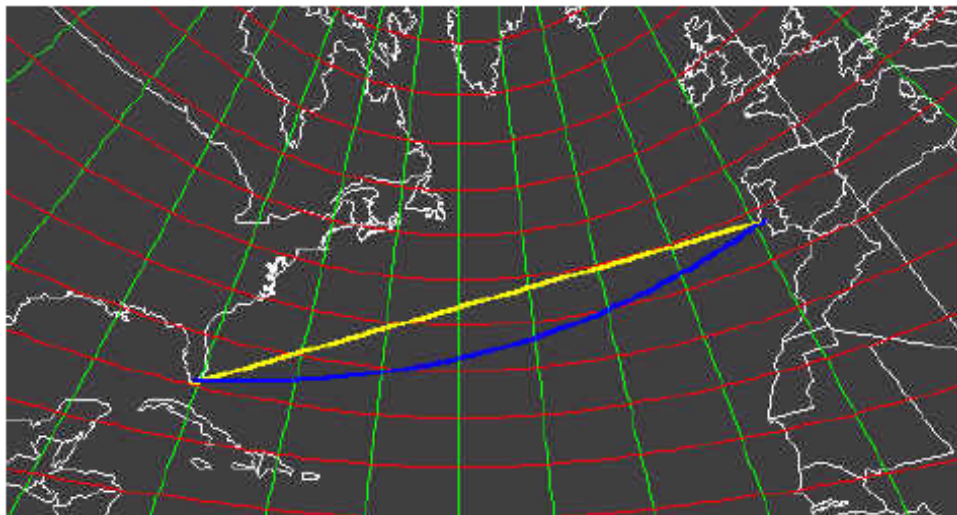
A dispetto del nome, queste non sono mappe che preservano le distanze (non possono esistere!), bensì mappe che preservano *alcune* distanze, come quella lungo particolari direzioni o quella rispetto ad un punto fisso (di solito il centro di proiezione). Un esempio è la *proiezione azimutale equidistante o egocentrica*, proiezione non geometrica su un piano, introdotta da Al-Biruni intorno all'anno 1000, costruita in modo da avere una scala corretta sulle rette per il centro  $C$ , punto di tangenza della sfera sul piano, riportando in proporzione le distanze corrette da  $C$  ad un qualunque punto della Terra. Se  $C$  è un polo, i paralleli diventano cerchi concentrici con centro il polo. Il polo opposto diventa un cerchio con diametro proporzionale all'equatore. Se  $C$  è un qualunque altro punto della Terra, come ad esempio Miami (Florida), come quella in figura:



una linea retta dal centro (Miami, questo caso) a Tokyo (o un altro qualsiasi punto) mostra la strada più corta, la distanza e la direzione corrette tra i due. È quindi utilizzata anche per le rotte aeree (una per ogni aeroporto!).

## Mappe geodetiche

La *proiezione gnomonica o centrografica* si ottiene dalla proiezione geometrica di una semisfera dal suo centro su un piano tangente in C. Archi di cerchi massimi (geodetiche sulla sfera) sono proiettati in segmenti (geodetiche sul piano) e viceversa un segmento sulla carta gnomonica corrisponde ad una geodetica sulla sfera (detta anche ortodromica):



gialla: geodetica (ortodromica) blu: lossodromica

Quindi sulla carta gnomonica la retta unente due punti rappresenta il percorso più breve sulla sfera tra i corrispondenti punti sulla sfera. Per questo motivo è spesso utilizzata per la navigazione, in quanto su questa carta è facile stabilire la rotta più breve. Il confronto con la carta di Mercatore permette di capire quando è più opportuno utilizzare una piuttosto che l'altra. Per determinare la rotta necessaria per raggiungere un determinato punto, si possono seguire due metodi. Il primo consiste nel mantenere costante l'angolo della prua rispetto alla direzione indicata dall'ago della bussola, cioè direzione costante. In tal caso si segue una retta sulla carta di Mercatore, quindi una lossodromica sulla superficie terrestre, curva che non rappresenta la strada più breve. Il secondo metodo consiste invece nel seguire il tragitto più breve possibile, cioè una geodetica, quindi una retta sulla carta gnomonica. In questo caso la rotta è di difficile calcolo (varia continuamente di direzione) e per poterla seguire si suddivide in tratti più brevi, per i quali si traccia la lossodromica, dopo averne riportati gli estremi su una carta di Mercatore. In conclusione la proiezione centrografica viene utilizzata per calcolare la rotta di lunghi percorsi.

## Appendice sulle trasformazioni del piano

**Isometrie:** Sono le trasformazioni del piano che preservano le distanze tra punti, cioè  $f : \pi \rightarrow \pi$ , biunivoche tali che

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q), \quad \forall P, Q \in \pi$$

**Proprietà isometrie**

A. presevano la lunghezza dei segmenti, quindi i perimetri

*B.* preservano le aree, cioè data una figura  $G$  nel piano e la corrispondente figura  $f(G)$  ottenuta trasformando tutti i punti di  $G$ , si ha che  $Area(G) = Area(f(G))$

*C.* preservano gli angoli, cioè dato un angolo  $\widehat{ABC}$ , si ha che  $f(A)f(B)f(C)$  è congruente ad  $\widehat{ABC}$

*D.* preservano le forme, in particolare mandano circonferenze in circonferenze

*E.* mandano rette in rette

*F.* mandano rette parallele in rette parallele

**Similitudini:** sono le trasformazioni del piano che preservano i rapporti tra distanze, cioè  $f : \pi \rightarrow \pi$  biunivoche tali che

$$\frac{d(A, B)}{d(P, Q)} = \frac{d(f(A), f(B))}{d(f(P), f(Q))}, \quad \forall P, Q, A, B \in \pi,$$

equivalentemente

$$\frac{d(f(P), f(Q))}{d(P, Q)} = \frac{d(f(A), f(B))}{d(A, B)} = k \text{ costante} \quad \forall P, Q, A, B \in \pi.$$

Tale costante  $k$  viene chiamata *rapporto di similitudine* (o fattore di scala) e ci dice di quanto le distanze vengono dilatate o contratte nella similitudine.

### Proprietà Similitudini

*A'* preservano i rapporti tra lunghezze corrispondenti, quindi il rapporto tra perimetri

*B'* preservano i rapporti tra le aree di superfici corrispondenti, cioè data una figura  $G$  nel piano e la corrispondente figura  $f(G)$  ottenuta trasformando tutti i punti di  $G$ , si ha che  $Area(f(G)) = k^2 Area(G)$

*C.* preservano gli angoli, cioè dato un angolo  $\widehat{ABC}$ , si ha che  $f(A)f(B)f(C)$  è congruente ad  $\widehat{ABC}$

*D.* preservano le forme, in particolare mandano circonferenze in circonferenze

*E.* mandano rette in rette

*F.* mandano rette parallele in rette parallele

**Affinità:** sono le trasformazioni del piano, cioè  $f : \pi \rightarrow \pi$  biunivoche,

*B'* preservano i rapporti tra le aree di superfici corrispondenti

*E.* mandano rette in rette (definizione)

*F.* mandano rette parallele in rette parallele

### Esempi

Proiezione lungo una data direzione tra due piani paralleli: isometria

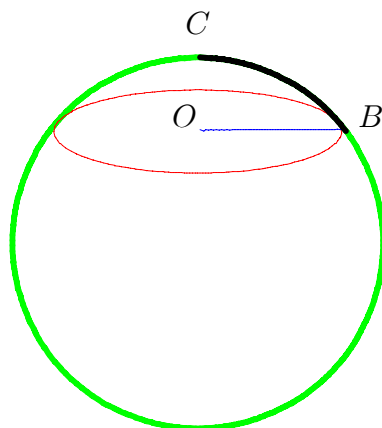
Proiezione da un punto tra due piani paralleli: similitudine.

Proiezione lungo una data direzione tra due piani non paralleli (come quella che si ottiene con le ombre prodotte sul pavimento dal sole attraverso una finestra): affinità.

Se invece la proiezione avviene da un punto tra due piani non paralleli non abbiamo più un'affinità perché si perde il parallelismo tra rette: in tal caso si parla di *proiettività* tra piani che hanno solo la proprietà *E* (mandano rette in rette).

## Appendice sulla curvatura

La definizione di curvatura in un punto si può dare attraverso una data formula, ma per avere un'idea di cosa misura, partiamo col misurare la lunghezza di circonferenze sulla sfera. Nel piano, la circonferenza bordo di un cerchio di raggio  $r$  ha lunghezza  $L(r) = 2\pi r$ . Di conseguenza  $\frac{L(r)}{2\pi r} = 1$ . In una sfera, la circonferenza bordo di un cerchio di raggio  $r$  non ha lunghezza  $2\pi r$ ! Per intendersi bene: il raggio  $r$  di un *cerchio su una sfera* = *calotta sferica* deve essere un arco di cerchio massimo, quello in grassetto nella figura, mentre il segmento in blu rappresenta il raggio della circonferenza bordo (in rosso)



Allora il raggio  $OB$  della circonferenza bordo del cerchio è minore di  $r$ , quindi

$$\frac{L(r)}{2\pi r} = \frac{2\pi OB}{2\pi r} = \frac{OB}{r} < 1$$

Il rapporto  $\frac{L(r)}{2\pi r}$ , dove  $L(r)$  = lunghezza circonferenza bordo di un cerchio su  $S$  di centro  $P$  e raggio  $r$ , è un indicatore della curvatura  $K(P)$  in  $P$ .

$$\frac{L(r)}{2\pi r} : \begin{cases} = 1 & K(P) = 0 \\ < 1 & K(P) > 0 \\ > 1 & K(P) < 0 \end{cases}$$

$$\left[ K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} \right]$$

Cosa c'entra ciò con l'esistenza di carte perfette? Gauss (1777-1855) trovò un collegamento tra la curvatura e la somma degli angoli di un triangolo:

$$s = 180 + \frac{180}{\pi} \int_T K dT,$$

Questa formula è importante dal punto di vista teorico, perchè ci permette di calcolare la curvatura della terra partendo dalla somma degli angoli di un triangolo ottenibile con misurazioni fatte sulle superficie terrestri. Di conseguenza, se esistesse una carta perfetta, le misurazioni fatte sulla terra si potrebbero ripetere (a meno di un fattore di scala) sulla carta. Quindi la curvatura misurata sulla terra ( $\simeq \frac{1}{R^2}$ ) coinciderebbe con la curvatura misurata sul piano (= 0)!