

Argomento 3

Limiti e calcolo dei limiti I

Distanza e intorni

In tutta la trattazione che segue si parlerà indistintamente di un *numero reale* o del corrispondente *punto* sulla retta euclidea (vedi Arg.1).

Definizione 3.1 Si definisce **distanza** tra due numeri reali o punti della retta euclidea a e b il modulo della loro differenza $|b - a| = |a - b|$.

Esempio 3.2 La distanza tra 1 e 4 è $|1 - 4| = |4 - 1| = 3$, la distanza tra -1 e 5 è $|-1 - 5| = |5 - (-1)| = 6$.

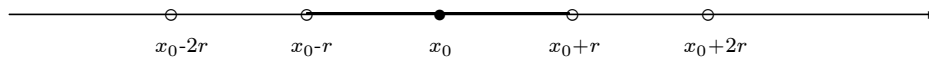
Utilizziamo ora la distanza per poter esprimere, attraverso la nozione di intorno, il concetto di “mettersi nelle vicinanze” di un numero reale:

Definizione 3.3 Si chiama **intorno** del numero reale x_0 di raggio $r > 0$ l'insieme dei numeri che distano da x_0 meno di r , cioè l'intervallo limitato aperto (vedi Arg.1):

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x - x_0 < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Esempio 3.4 L'intorno $U(2, 1)$ di 2 di raggio 1 è l'intervallo aperto $(2 - 1, 2 + 1) = (1, 3)$.

Esistono infiniti intorni di x_0 , uno per ogni possibile raggio:



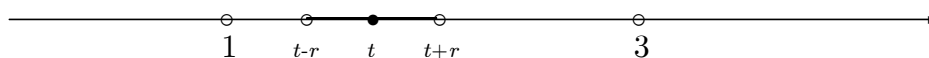
La scelta di un intorno è quindi data dalla scelta del suo raggio, cioè dalla scelta di un numero reale positivo. L'intersezione di due intorni di x_0 è data dall'intorno di raggio minore.

In generale si indicherà con $U(x_0)$ un qualunque intorno di x_0 .

Definizione 3.5 Dato un sottoinsieme A di \mathbb{R} e $x_0 \in A$, x_0 è detto **punto interno** di A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A .

Esempi 3.6

- Verifichiamo che ogni $t \in (1, 3)$ è un punto interno di $(1, 3)$: si prenda r minore del minimo tra le distanze $|t - 1|$ e $|3 - t|$. Allora $1 < t - r < t + r < 3$ e di conseguenza l'intorno $U(t, r) = (t - r, t + r)$ risulta contenuto in $(1, 3)$:



Ciò vale in generale per qualunque intervallo aperto (a, b) : ogni punto di (a, b) è interno.

- L'estremo a dell'intervallo $[a, b)$ non è un suo punto interno, in quanto ogni suo intorno contiene numeri minori di a che quindi non appartengono a $[a, b)$. Nello stesso modo si verifica in generale che gli estremi di un qualsiasi intervallo non sono punti interni.
- L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} non contiene punti interni.

Dalla definizione di intorno segue che avvicinarsi a un numero reale x_0 significa “muoversi” in intorni di x_0 di raggio sempre più piccolo.

Per i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non ha senso parlare in modo analogo di distanza. Con l'espressione “avvicinarsi” a $+\infty$ si intende muoversi verso destra lungo semirette illimitate a destra, con “avvicinarsi” a $-\infty$ muoversi verso sinistra lungo semirette illimitate a sinistra. Si può allora generalizzare a $+\infty$ e $-\infty$ la definizione di intorno.

Definizioni 3.7

- Si chiama **intorno di $+\infty$** di estremo sinistro a l'intervallo aperto illimitato a destra

$$U(+\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty) .$$

- Si chiama **intorno di $-\infty$** di estremo destro a l'intervallo aperto illimitato a sinistra

$$U(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a) .$$

Se P rappresenta un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ e $-\infty$, si indicherà in generale con $U(P)$ un intorno di P .

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si possono anche dare le nozioni di intorno destro e di intorno sinistro, che tengono conto rispettivamente dei punti “vicini a x_0 ” maggiori di x_0 e dei punti “vicini a x_0 ” minori di x_0 .

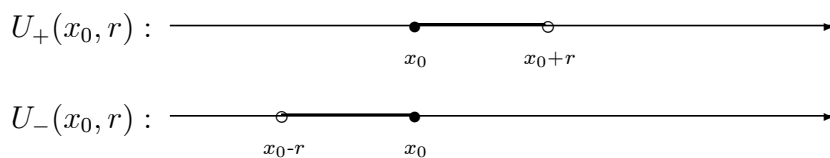
Definizioni 3.8

- Si chiama **intorno destro di x_0** di raggio r l'intervallo

$$U_+(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_0, |x - x_0| < r\} = [x_0, x_0 + r)$$

- Si chiama **intorno sinistro di x_0** di raggio r l'intervallo

$$U_-(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_0, |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0]$$



Esempio 3.9 L'intorno destro $U_+(3, 4)$ di 3 di raggio 4 è l'intervallo $[3, 7)$. L'intorno sinistro $U_-(1, 2)$ di 1 di raggio 2 è l'intervallo $(-1, 1]$.

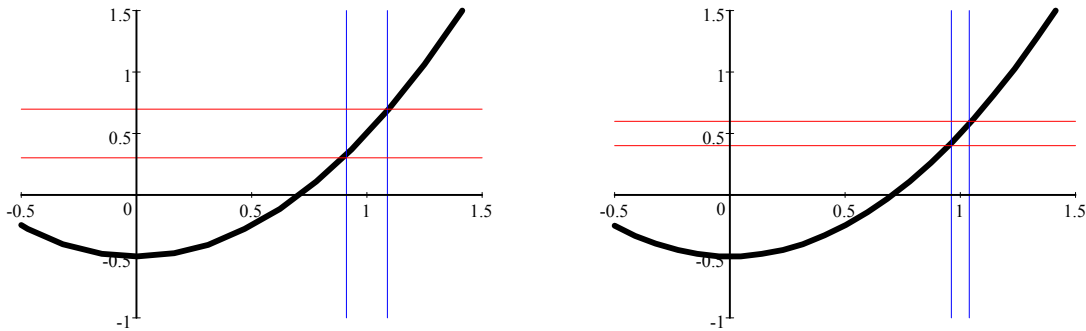
In generale si indicherà con $U_+(x_0)$ un intorno destro qualsiasi del numero reale x_0 e con $U_-(x_0)$ un intorno sinistro.

Avvicinarsi al numero reale x_0 esclusivamente da destra (rispettivamente da sinistra) significa “muoversi” in intorni destri (rispettivamente sinistri) di x_0 sempre più piccoli.

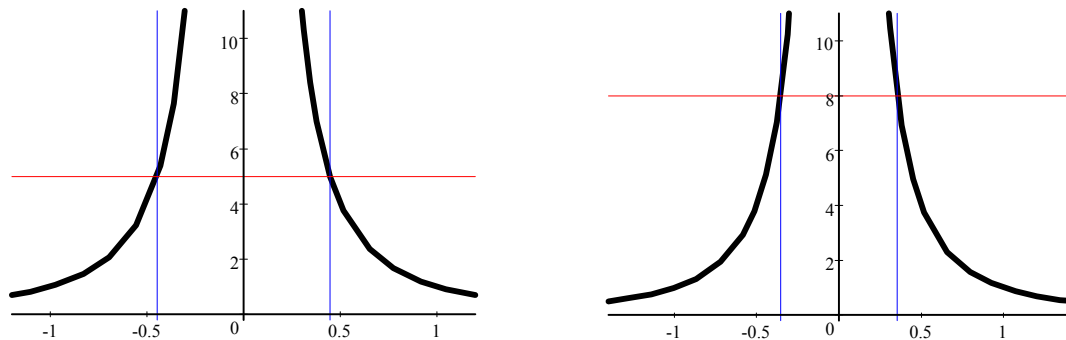
Definizione di limite

Indichiamo con P un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ e $-\infty$. I valori assunti da una funzione f mentre il suo argomento si avvicina a P , possono avvicinarsi a un numero reale L oppure essere in modulo sempre più grandi, come vediamo negli esempi seguenti:

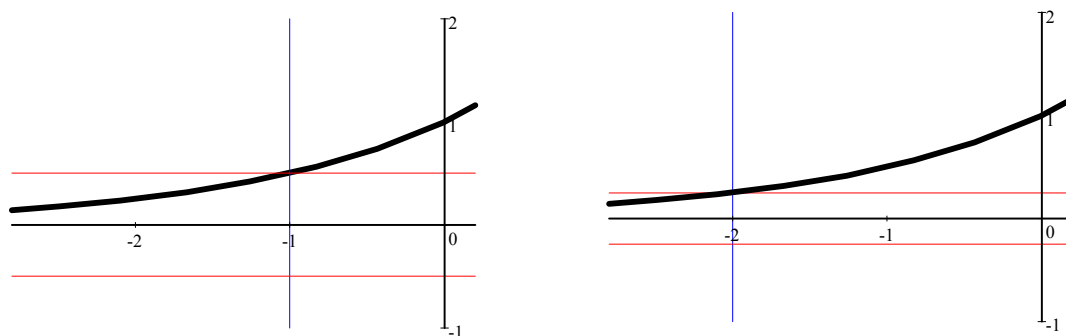
Esempio 3.10 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione $x^2 - \frac{1}{2}$ si avvicinano (tendono) al numero $\frac{1}{2}$ per x che si avvicina (tende) a 1.



Esempio 3.11 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione $\frac{1}{x^2}$ si avvicinano a $+\infty$ per x che si avvicina a 0.



Esempio 3.12 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione e^x si avvicinano a 0 per x che si avvicina a $-\infty$.



Nota Per conoscere il comportamento di f “vicino a P ” non è importante il valore di f in P o addirittura che f sia definita in P , ma occorre che la funzione sia definita per numeri “arbitrariamente vicini” a P , quindi per numeri (diversi da P) in ogni suo intorno arbitrariamente piccolo: questo si esprime dicendo che P deve essere un punto di accumulazione per il dominio di f .

Definizione 3.13 P è **punto di accumulazione** per un sottoinsieme A di \mathbb{R} se in ogni intorno $U(P)$ di P ci sono elementi di A diversi da P , cioè

$$\forall U(P) \quad \exists x \in A \cap U(P), \quad x \neq P.$$

Definizione 3.14 P è **punto di accumulazione destro (sinistro)** per il sottoinsieme A di \mathbb{R} se in ogni intorno destro (sinistro) di x_0 esistono elementi di A diversi da P .

Esempi 3.15

- Se P è un punto interno di A , P è ovviamente un suo punto di accumulazione, perché, visto che esiste un intorno U di P tutto contenuto in A , ogni altro intorno U' di P contiene l'intorno $U' \cap U$ e quindi dei punti di A diversi da P .
- L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali ha come unico punto di accumulazione $+\infty$: ogni intervallo illimitato a destra contiene numeri naturali.
- L'insieme dei punti di accumulazione e dei punti di accumulazione da sinistra di $[1, 2) \cup \{3\}$ è $[1, 2]$, mentre l'insieme dei suoi punti di accumulazione da destra è $[1, 2)$. Si noti che 2 è punto di accumulazione di $[1, 2) \cup \{3\}$ ma non vi appartiene.

È ora possibile formalizzare in modo rigoroso il concetto di limite, dando la seguente definizione:

Definizione 3.16 Data la funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ e $P \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per il suo dominio A , si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite** di f per x che tende a P e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = L$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno di P i cui punti x del dominio A diversi da P hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L , cioè

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = L \Leftrightarrow \forall U(L) \quad \exists U(P) \text{ tale che } \forall x \in A \cap U(P), \quad x \neq P, \quad f(x) \in U(L).$$

La definizione di limite 3.16 ha il vantaggio di andare bene sia che il punto P e il limite L siano numeri reali, sia che P o L o entrambi siano $+\infty$ o $-\infty$. Bisogna però ricordare che gli intorni di un numero reale sono intervalli limitati centrati in quel numero, mentre gli intorni di $+\infty$ o $-\infty$ sono intervalli illimitati a destra o a sinistra (def. 3.3 e 3.7).¹

¹Per impratichirsi con la definizione di limite è utile riscriverla nei vari casi. Vediamone alcuni:

1) Siano $P = x_0$ e L numeri reali come nell'esempio 3.10. Gli intorni $U(L)$ e $U(x_0)$ sono intervalli limitati determinati dai raggi ϵ e δ e $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se e solo se $|x - x_0| < \delta$ mentre $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ se e solo se $|f(x) - L| < \epsilon$. Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in A, x \neq x_0$ e $|x - x_0| < \delta$, si ha che $|f(x) - L| < \epsilon$.

2) Siano $P = x_0$ un numero reale e $L = +\infty$, come nell'esempio 3.11. Gli intorni di x_0 sono determinati dal raggio δ , gli intorni $(k, +\infty)$ di $+\infty$ sono determinati dall'estremo inferiore k e $f(x) \in (k, +\infty)$ se e solo se $f(x) > k$. Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in A, x \neq x_0$ e $|x - x_0| < \delta$, si ha che $f(x) > k$.

3) Siano $P = -\infty$ e L un numero reale, come nell'esempio 3.12. Ogni intorno di L è determinato dal raggio ϵ , ogni intorno $(-\infty, k)$ di $-\infty$ dall'estremo superiore k e $x \in (-\infty, k)$ se e solo se $x < k$. Quindi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists k$ tale che $\forall x \in A, \text{ con } x < k$, si ha che $|f(x) - L| < \epsilon$.

Si può verificare direttamente dalla definizione che negli esempi visti, si trova il limite che ci si aspettava, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

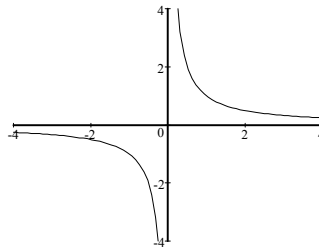
Definizione 3.17 Se il limite per $x \rightarrow P$ è finito, si dice che la funzione *converge*, se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ che *diverge* o che è *un infinito* per $x \rightarrow P$.

Esistenza del limite

Il limite può non esistere.

Esempi 3.18

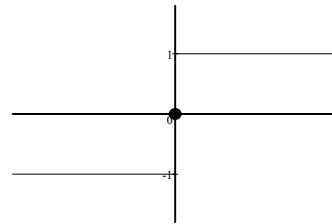
- NON esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ perchè in qualunque intorno di 0 ci sono sia punti le cui immagini mediante $\frac{1}{x}$ stanno in intorni arbitrari di $+\infty$ sia punti le cui immagini stanno in intorni arbitrari di $-\infty$.



$$f(x) = 1/x$$

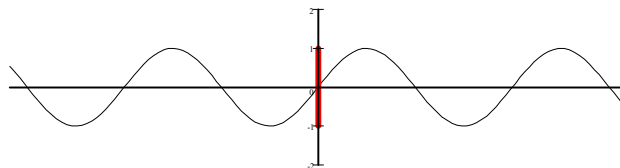
- Data la funzione “signum”

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



si noti che NON esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$

Esempio 3.19 NON esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$, perchè qualunque intorno di $+\infty$ ha come immagine mediante $\sin x$ l'intero intervallo $[-1, 1]$.



$$f(x) = \sin x$$

Limite destro e sinistro

Sulla falsariga delle definizioni precedenti si danno le definizioni di: limite destro e sinistro.

Definizioni 3.20 Data la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro (sinistro) per A ,

- si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite destro** di f per x che tende a x_0 (o il limite di f per x che tende a x_0 da destra) e si scrive

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno destro di x_0 i cui punti x diversi da x_0 hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L , cioè

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall U(L) \exists U_+(x_0) \text{ tale che } \forall x \in A \cap U_+(x_0), x \neq x_0, \quad f(x) \in U(L).$$

- si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite sinistro** di f per x che tende a x_0 (o il limite di f per x che tende a x_0 da sinistra) e si scrive

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno sinistro di x_0 i cui punti x diversi da x_0 hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L , cioè

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall U(L) \exists U_-(x_0) \text{ tale che } \forall x \in A \cap U_-(x_0), x \neq x_0, \quad f(x) \in U(L).$$

Segue dalle definizioni che, se x_0 è punto di accumulazione sia destro che sinistro, allora ha senso parlare sia di limite destro che di limite sinistro, sia di limite completo e si ha che ²

$$\text{esiste } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ se e solo esistono } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Esempio 3.21 $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, quindi $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Esempi 3.22 (confronta con gli esempi 3.18)

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, quindi NON esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$, quindi NON esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$.

²Si può inoltre definire il limite per eccesso (resp. per difetto).

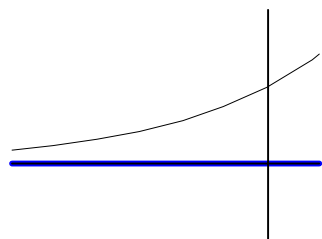
Def: Data la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per A , si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il **limite per eccesso** (resp. **per difetto**) di f per x che tende a P e si scrive $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = L^+$ (resp. L^-) se $\forall U_+(L)$ intorno destro di L (resp. $U_-(L)$ intorno sinistro) $\exists U(P)$ intorno di P tale che $\forall x \in A \cap U(P), x \neq P, \quad f(x) \in U_+(L)$ (resp. $U_-(L)$).

Asintoti orizzontali e verticali

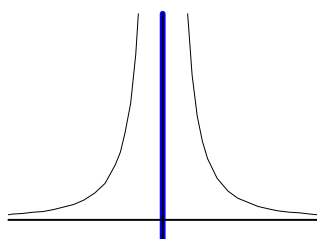
Definizione 3.23 Se la funzione converge al numero reale L per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$ si dice che la funzione ammette **asintoto orizzontale** $y = L$.

Definizione 3.24 Se la funzione diverge per x che tende al numero reale x_0 da destra o da sinistra si dice che la funzione ammette **asintoto verticale** $x = x_0$.

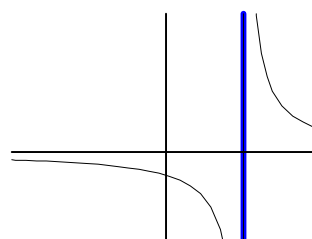
Ad esempio 2^x ha asintoto orizzontale $y = 0$ per x che tende a $-\infty$, mentre $\frac{1}{x^2}$ ha asintoto verticale $x = 0$ e $\frac{1}{x-1}$ ha asintoto verticale $x = 1$.



asintoto $y = 0$



asintoto $x = 0$



asintoto $x = 1$

Limiti delle funzioni monotone

Nel caso di funzioni monotone (non necessariamente continue) definite su intervalli il limite agli estremi dell'intervallo è determinato dalla monotonia della funzione stessa.

Come in Arg.1

$$\inf_A f = \begin{cases} \text{estremo inferiore di } f(A), & \text{se } f \text{ è inferiormente limitata in } A \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_A f = \begin{cases} \text{estremo superiore di } f(A), & \text{se } f \text{ è superiormente limitata in } A \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vale il seguente teorema:

Teorema 3.25 (limiti di funzioni monotone su intervalli)

Sia f **crescente** (strettamente o debolmente) nell'intervallo I .

$$\text{Se } I = (a, b), \text{ allora } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

$$\text{Se } I = (a, +\infty), \text{ allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{(a,+\infty)} f.$$

$$\text{Se } I = (-\infty, b), \text{ allora } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf_{(-\infty,b)} f.$$

Sia f **decrescente** (strettamente o debolmente) nell'intervallo I .

$$\text{Se } I = (a, b), \text{ allora } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f.$$

$$\text{Se } I = (a, +\infty), \text{ allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{(a,+\infty)} f.$$

$$\text{Se } I = (-\infty, b), \text{ allora } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup_{(-\infty,b)} f.$$

Limiti delle funzioni elementari

Prima di affrontare il calcolo esplicito dei limiti premettiamo la seguente definizione (vedi Arg.5):
Definizione 3.26 Una funzione si dice **continua in** x_0 punto del dominio A di f e di accumulazione per A , se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

In altre parole per le funzioni continue in un punto x_0 il limite per $x \rightarrow x_0$ coincide con il valore della funzione.

L'esempio 3.21 mostra che $|x|$ è continua in 0.

Vale la seguente importante proprietà:

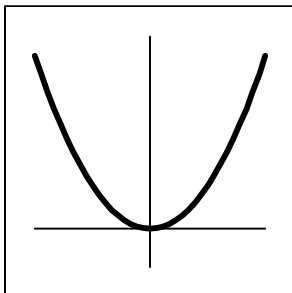
Ogni funzione elementare è continua nel suo campo d'esistenza

Esempi 3.27

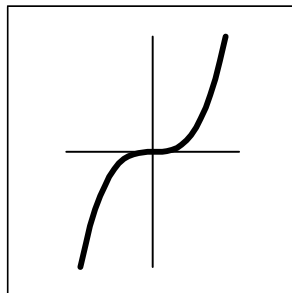
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} 2^x = 2^3 = 8, \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = \tan(0) = 0, \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0$$

Riportiamo i grafici delle funzioni elementari e i loro limiti agli estremi dei campi d'esistenza ricavabili dal precedente teorema sui limiti delle funzioni monotone.

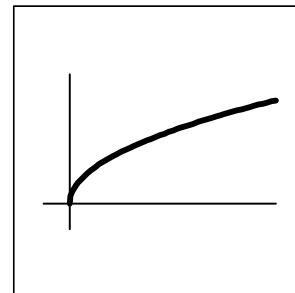
Funzione potenza:



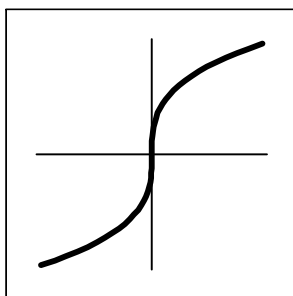
$$f(x) = x^{2n}$$



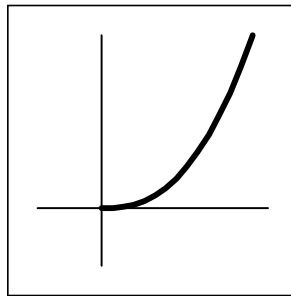
$$f(x) = x^{2n+1}$$



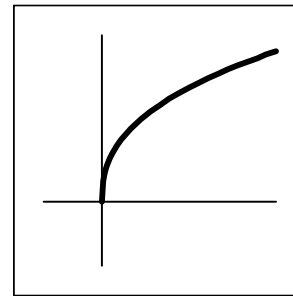
$$f(x) = \sqrt[2n]{x}$$



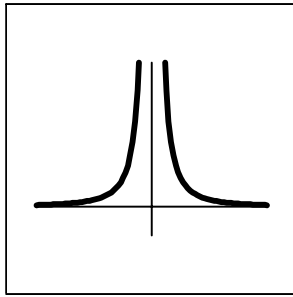
$$f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$$



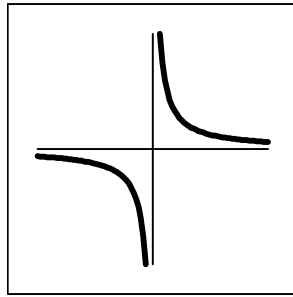
$$x^\alpha, \alpha \text{ reale } > 1$$



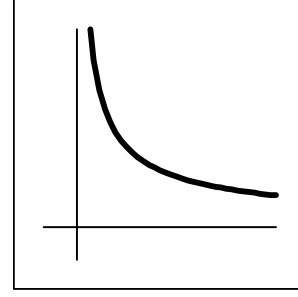
$$x^\alpha, 0 < \alpha < 1$$



$$\frac{1}{x^{2n}} = x^{-2n}$$



$$\frac{1}{x^{2n+1}} = x^{-2n-1}$$



$$x^\alpha, \alpha \text{ reale } < 0$$

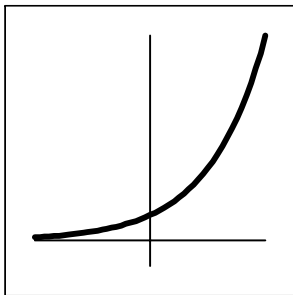
- per $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0^\alpha = 0$
- per $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$$

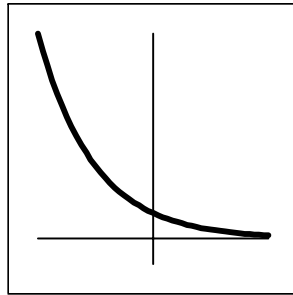
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-2n-1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-2n-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-2n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-2n} = +\infty$$

In particolare $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2n} = +\infty$, mentre **non** esiste $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2n-1}$.

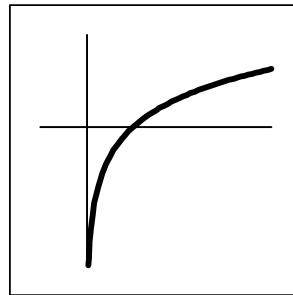
Funzioni esponenziali e logaritmiche:



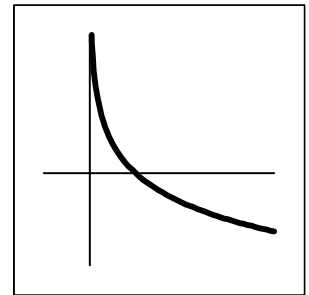
$$f(x) = a^x, \text{ con } a > 1$$



$$a^x, \text{ con } 0 < a < 1$$



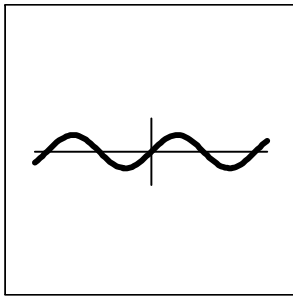
$$\log_a x, a > 1$$



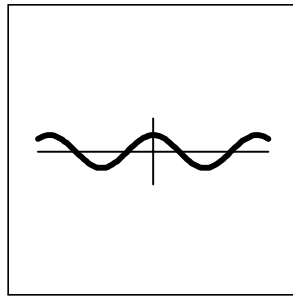
$$\log_a x, 0 < a < 1$$

- per $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
- per $0 < a < 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
- per $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
- per $0 < a < 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

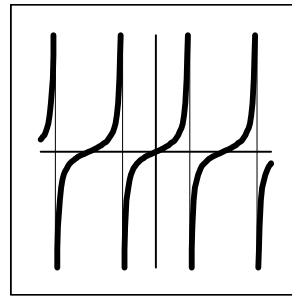
Funzioni trigonometriche:



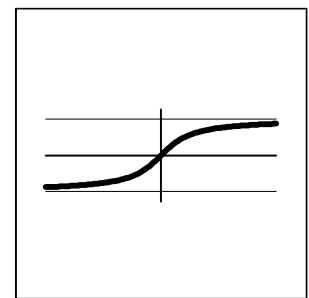
$$f(x) = \sin x$$



$$f(x) = \cos x$$



$$f(x) = \tan x$$



$$f(x) = \arctan x$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Non esistono i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)} \tan x$$

Proprietà dei limiti

Somma: Si vuole ora calcolare il limite di una somma di funzioni di cui conosciamo singolarmente il limite. In molti casi non ci sono problemi, in quanto a partire dalla definizione si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti.*

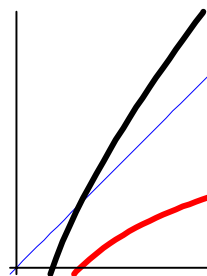
Esempio 3.28

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \log_2 x = 5 & & \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x + \cos x = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & -1 \end{array}$$

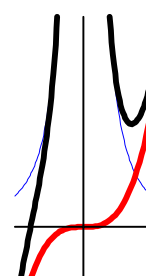
Nei casi in cui *una sola funzione o entrambe divergono a $+\infty$, oppure una sola o entrambe divergono a $-\infty$* , si dimostra che *i limiti delle somme sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.*

Esempi 3.29

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \log x) = +\infty & & \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} + x^3) = +\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & 0 \end{array}$$



sottile x , rossa $\log x$, nera $x + \log x$



sottile $\frac{1}{x^2}$, rossa x^3 , nera $\frac{1}{x^2} + x^3$

Se invece una funzione diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, si possono avere comportamenti differenti per cui non si può concludere nulla a priori. (**Forma indeterminata** $\infty - \infty$)

Esempio 3.30

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (-2 - x^2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 = -2 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ +\infty \qquad \qquad -\infty \end{array}$$

mentre si che che (vedi esempi 3.32 e 3.33)

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ +\infty \qquad \qquad -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (-x^3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\infty \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ +\infty \qquad \qquad -\infty \end{array}$$

Le proprietà che legano l'operazione di limite all'operazione di somma di funzioni sono riassunte nella seguente tabella:

	$f(x) \rightarrow$	$L \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
S	$g(x) \rightarrow$	$M \in \mathbf{R}$	M	M	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$f(x) + g(x) \rightarrow$	$L + M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

Il punto interrogativo indica che non si può in generale concludere nulla sul limite.

Prodotto: Anche il calcolo del limite di un prodotto di funzioni di cui si conoscono i limiti risulta in molti casi immediato. A partire dalla definizione si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.*

Esempi 3.31

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow 1} 2^x \cdot \arctan x = \pi/2, & \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot (x^3 + 3) = 3 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 2 \qquad \qquad \pi/4 & \qquad \qquad 1 \qquad \qquad 3 \end{array}$$

Inoltre si dimostra che, se una delle funzioni diverge a $+\infty$ e l'altra converge a un numero positivo o diverge a $+\infty$, oppure una diverge a $-\infty$ e l'altra converge a un numero negativo o diverge a $-\infty$, il limite del prodotto è sempre $+\infty$.

Esempi 3.32

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \log x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

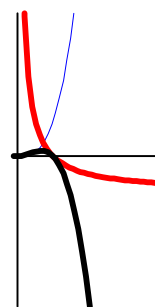
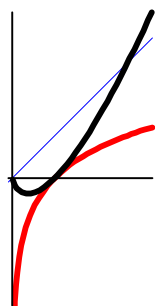
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & 1 \end{array}$$

Infine si dimostra che, se una delle funzioni diverge a $+\infty$ e l'altra converge a un numero negativo o diverge a $-\infty$, oppure una diverge a $-\infty$ e l'altra converge a un numero positivo, il limite del prodotto è sempre $-\infty$.

Esempi 3.33

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot (4x^5 + 2) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\infty$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & -\infty \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & -1 \end{array}$$



Es. 3.32: sottile x , rossa $\log x$, nera $x \log x$

Es. 3.33: sottile $\frac{1}{x} - 1$, rossa x^3 , nera $(\frac{1}{x} - 1) x^3$

Le proprietà che legano l'operazione di limite all'operazione di prodotto di funzioni sono riassunte nella seguente tabella:

	$f(x) \rightarrow$	$L \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ o $-\infty$
P	$g(x) \rightarrow$	$M \in \mathbf{R}$	$M > 0$	$M < 0$	$M > 0$	$M < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
	$f(x) \cdot g(x) \rightarrow$	$L \cdot M$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

Se invece una funzione diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ e l'altra a 0, si possono avere comportamenti differenti per cui non si può concludere nulla a priori. (**Forma indeterminata** $\infty \cdot 0$)

Esempi 3.34

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \cdot e^{x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 = e^2$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & +\infty \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-2} \cdot (x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2x^{-2} = -\infty$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & -\infty \end{array}$$

Quoziente: Anche il calcolo del limite di un quoziente di funzioni di cui si conoscono i limiti in molti casi è immediato. Si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali e il limite del denominatore è diverso da 0, il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti.*

Esempi 3.35

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x + 2}{\cos x + 3} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & 3 & \\ & \uparrow & \\ & 4 & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7}{\log_2 x + 3^x} = \frac{3 \cdot 4 - 7}{1 + 9} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & 3 \cdot 4 - 7 & \\ & \uparrow & \\ & 1 + 9 & \end{array}$$

Inoltre si dimostra che, *se il numeratore converge e il denominatore diverge, il limite del quoziente è 0. Se invece il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge a un numero positivo, oppure il numeratore diverge a $-\infty$ e il denominatore converge a un numero negativo, il limite del quoziente è sempre $+\infty$. Infine, se il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge a un numero negativo, oppure il numeratore diverge a $-\infty$ e il denominatore converge a un numero positivo, il limite del quoziente è sempre $-\infty$.*

Esempi 3.36

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^3 - 1} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & 0 & \\ & \uparrow & \\ & +\infty & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\arctan x - \pi} = -\infty$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & +\infty & \\ & \uparrow & \\ & -\frac{\pi}{2} & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2}{3^x - 1} = +\infty$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & -\infty & \\ & \uparrow & \\ & -1 & \end{array}$$

Tali casi immediati sono raccolti nella prima tabella riassuntiva sui limiti dei quozienti.

Q_1	$f(x) \rightarrow$	$L \in \mathbf{R}$	$L \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$g(x) \rightarrow$	$M \neq 0$	$+\infty$ o $-\infty$	$M > 0$	$M < 0$	$M > 0$	$M < 0$
	$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$	$\frac{L}{M}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Se il denominatore ha invece limite 0 bisogna stare molto attenti perchè il limite può anche non esistere.

Esempi 3.37

- Come abbiamo visto non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$. Il numeratore è sempre 1 e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, ma ovviamente per $x > 0$ il denominatore assume valori > 0 , per $x < 0$ assume valori < 0 , quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- Non esiste $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x-1}$: infatti $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$ e $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$, ma per $x > 1$, il denominatore assume valori > 0 , per $x < 1$ assume valori < 0 , quindi $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$, mentre $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty$.

In generale se $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$, ma f assume sia valori positivi che negativi in ogni intorno di P , non può esistere $\lim_{x \rightarrow P} \frac{1}{f(x)}$, perchè in ogni intorno di P ci sono punti in cui $\frac{1}{f}$ assume valori sia positivi che negativi arbitrariamente grandi in valore assoluto.

IMPORTANTE: Con

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0^+$$

si indica che il limite è 0 e inoltre esiste un intorno di P i cui punti nel dominio di f soddisfano la condizione $f(x) > 0$. In tal caso $\lim_{x \rightarrow P} \frac{1}{f} = +\infty$. Analogamente con $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0^-$ si indica che il limite è 0 e esiste un intorno di P i cui punti (nel dominio di f) soddisfano $f(x) < 0$ e in questo caso $\lim_{x \rightarrow P} \frac{1}{f} = -\infty$.

Nei casi il cui *il denominatore converge a 0^+ ed il numeratore tende a un numero positivo o a $+\infty$* , oppure *il denominatore converge a 0^- e il numeratore tende a un numero negativo o a $-\infty$* , si dimostra che *il limite del quoziente è $+\infty$* . Se invece *il denominatore converge a 0^+ e il numeratore tende a un numero negativo o a $-\infty$* , oppure *il denominatore converge a 0^- e il numeratore tende a un numero positivo o a $+\infty$* , si dimostra che *il limite del quoziente è $-\infty$* .

Esempi 3.38

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\log x}{x^3} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

$\begin{matrix} +\infty \\ \uparrow \\ -\log x \\ \downarrow \\ 0^+ \end{matrix}$
 $\begin{matrix} -1 \\ \uparrow \\ x-3 \\ \downarrow \\ 0^+ \end{matrix}$

Se invece sia il numeratore che il denominatore divergono oppure se entrambi convergono a 0 non si può concludere nulla a priori su tali limiti (**Forme indeterminate** $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$).

Esempi 3.39

$$\text{per } x \rightarrow +\infty : \frac{\begin{matrix} +\infty \\ \uparrow \\ 2x^2 - 1 \\ \downarrow \\ +\infty \end{matrix}}{x^3 + 2x - 1} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 + 2\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\begin{matrix} 2 \\ \uparrow \\ 2 - \frac{1}{x^2} \\ \downarrow \\ +\infty \end{matrix}}{x \left(1 + 2\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} \rightarrow 0$$

$$\text{per } x \rightarrow +\infty : \frac{\begin{matrix} +\infty \\ \uparrow \\ x^5 - 2 \\ \downarrow \\ +\infty \end{matrix}}{x^3 + x - 3} = \frac{x^5 \left(1 - \frac{2}{x^5}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)} = \frac{\begin{matrix} +\infty \\ \uparrow \\ x^2 \left(1 - \frac{2}{x^5}\right) \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix}}{\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)} \rightarrow +\infty$$

Gli ultimi casi sono riassunti nella seconda tabella sui limiti di quozienti:

Q_2	$f(x) \rightarrow$	$L > 0$ o $+\infty$	$L > 0$ o $+\infty$	$L < 0$ o $-\infty$	$L < 0$ o $-\infty$	0	$+\infty$ o $-\infty$
	$g(x) \rightarrow$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$+\infty$ o $-\infty$
	$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	?

In Arg.4 sono esposti alcuni metodi di calcolo per limiti che si presentano in una delle forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Limiti di funzioni composte

Affrontiamo ora il problema di calcolare il limite di una funzione composta. Si dimostra che³:

Siano P, Q e L numeri reali o i simboli $+\infty$ o $-\infty$.

$$\text{Se } \begin{cases} \cdot \lim_{x \rightarrow P} f(x) = Q \\ \cdot \lim_{t \rightarrow Q} g(t) = L \end{cases} \text{ allora } \lim_{x \rightarrow P} g(f(x)) = L$$

³va aggiunta anche l'ipotesi (sempre soddisfatta se non in casi molto particolari di cui non ci occuperemo) che esista un intorno di P in cui (tranne eventualmente che in P) f non assume mai il valore Q .

Il risultato precedente si comprende meglio se si pensa a come le funzioni si compongono⁴:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x & \xrightarrow{f(\cdot)} & f(x) & \xrightarrow{g(\cdot)} & g(f(x)) \\ \text{per } x \rightarrow P & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P & & Q & & L \end{array}$$

In particolare se g è continua in $t_0 = \lim_{x \rightarrow P} f(x)$ allora:

$$\lim_{x \rightarrow P} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = g(t_0) = g(\lim_{x \rightarrow P} f(x))$$

quindi se f è continua in $P = x_0$ (cioè $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$) allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

Esempi 3.40

- Vogliamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sin x)$. Si segue l'ordine di composizione:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x & \xrightarrow{\sin(\cdot)} & \sin x & \xrightarrow{\log(\cdot)} & \log(\sin x) \\ \text{per } x \rightarrow 0^+ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0^+ & & 0^+ & & -\infty \end{array}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\pi e^{\frac{1}{x}}) = -1$. Infatti

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & x & \xrightarrow{\frac{1}{(\cdot)}} & \frac{1}{x} & \xrightarrow{e^{(\cdot)}} & e^{\frac{1}{x}} & \xrightarrow{\cdot \pi} & \pi e^{\frac{1}{x}} & \xrightarrow{\cos(\cdot)} & \cos(\pi e^{\frac{1}{x}}) \\ \text{per } x \rightarrow +\infty & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & +\infty & & 0^+ & & 1 & & \pi & & -1 \end{array}$$

La regola precedente è utile per calcolare certi limiti mediante un “*cambio di variabile*”: per calcolare $\lim_{x \rightarrow P} g(f(x))$ si può scrivere $t = f(x)$ con $t \rightarrow Q$ per $x \rightarrow P$ e calcolare $\lim_{t \rightarrow Q} g(t)$.

Limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)} \quad \text{con } f(x) > 0 \text{ in un intorno di } P$$

si possono ricondurre a limiti di prodotti, mediante la trasformazione

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log(f(x))}$$

⁴Si faccia attenzione: le frecce orizzontali indicano l'applicazione delle funzioni, le frecce verticali il limite.

(nell'intorno di P) e per la continuità della funzione e^x :

$$\text{per } x \rightarrow P \quad \begin{array}{ccc} x^{g(x) \cdot \log f(x)} & g(x) \cdot \log(f(x)) & \xrightarrow{e^{(\cdot)}} e^{g(x) \log(f(x))} = f(x)^{g(x)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & \lim_{x \rightarrow P} g(x) \cdot \log(f(x)) & \lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)} \end{array}$$

Nei casi in cui $g(x) \cdot \log(f(x))$ non dà una forma indeterminata, il calcolo è immediato. In particolare

Esempio 3.41 Se $\lim_{x \rightarrow P} g(x) = L$ reale diverso da 0, allora $\lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow P} f(x)^L$,

come per $\lim_{x \rightarrow 2} x^x = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$:

$$\text{per } x \rightarrow 2 \quad \begin{array}{ccc} x^{x \log x} & x \log x & \xrightarrow{e^{(\cdot)}} e^{x \log x} = x^x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 \log 2 & e^{2 \log 2} = 2^2 = 4 \end{array}$$

Esempio 3.42 Se $\lim_{x \rightarrow P} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)} = +\infty$,

come per $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty$:

$$\text{per } x \rightarrow +\infty \quad \begin{array}{ccc} x^{x \log x} & x \log x & \xrightarrow{e^{(\cdot)}} x^x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ +\infty & +\infty & +\infty \end{array}$$

Esempio 3.43 Se $\lim_{x \rightarrow P} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)} = 0$,

come per $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{3x} = 0$:

$$\text{per } x \rightarrow +\infty : \quad \begin{array}{ccc} x^{2x \log \frac{1}{x^2}} & 2x \log \frac{1}{x^2} & \xrightarrow{e^{(\cdot)}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{3x} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ +\infty & -\infty & 0 \end{array} \quad \left(\text{dove } \begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \log \frac{1}{x^2} = -\infty \\ \downarrow & \downarrow \\ +\infty & -\infty \end{array} \right)$$

Esempio 3.44 Se $\lim_{x \rightarrow P} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)} = +\infty$,

come per $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\tan x} = +\infty$:

$$\begin{array}{ccc} x^{\tan x \log(x - \frac{\pi}{2})} & \tan x \log(x - \frac{\pi}{2}) & \xrightarrow{e^{(\cdot)}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\tan x} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{\pi}{2}^+ & +\infty & +\infty \end{array} \quad \left(\text{dove } \begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\tan x) \log(x - \frac{\pi}{2}) = +\infty \\ \downarrow & \downarrow \\ -\infty & -\infty \end{array} \right)$$

Se $\lim_{x \rightarrow P} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$ oppure $\lim_{x \rightarrow P} g(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ e $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 1$

per $x \rightarrow P$ $g(x) \cdot \log(f(x))$ è una forma indeterminata $0 \cdot \infty$

quindi in questi casi il limite $\lim_{x \rightarrow P} f(x)^{g(x)}$ non si può determinare a priori.

Alcuni teoremi sui limiti

Indichiamo con P un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ o $-\infty$. Elenchiamo alcuni teoremi sui limiti.

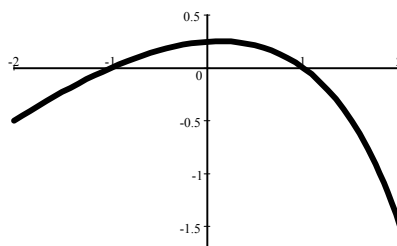
Teorema 3.45 (unicità del limite) Se esiste $\lim_{x \rightarrow P} f(x)$ è unico (cioè se $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = M$ allora $L = M$).

Segue dalla definizione di limite che:

Teorema 3.46 Dato $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = L$, allora esiste un intorno di P dove f è

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{limitata, se } L \in \mathbb{R} \\ \cdot \text{inferiormente limitata, se } L = +\infty \\ \cdot \text{superiormente limitata, se } L = -\infty \end{array} \right.$$

Esempio 3.47 Data $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4x}$, risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)}{(x - 4)} = \frac{1}{4}$,
quindi esiste un intorno di 0 (ad esempio $(-2, 2)$) in cui funzione è limitata, visto che $f(-2, 2) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$:



Teorema 3.48 (della permanenza del segno) Se $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = L \neq 0$

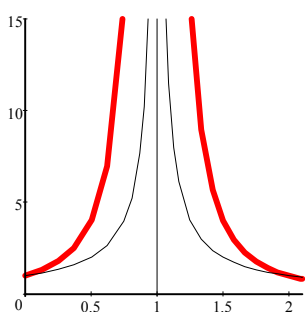
allora esiste un intorno di P in cui f è $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{positiva, se } L > 0 \text{ o } L = +\infty \\ \cdot \text{negativa, se } L < 0 \text{ o } L = -\infty \end{array} \right.$

Esempio 3.49 Nell'esempio precedente, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4x} = \frac{1}{4} > 0$ e f è maggiore di 0 nell'intorno $(-1, 1)$ di 0 .

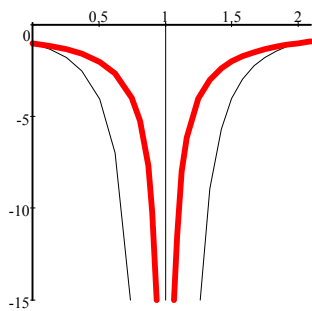
Teorema 3.50 (Criterio del confronto)

1) Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di P .

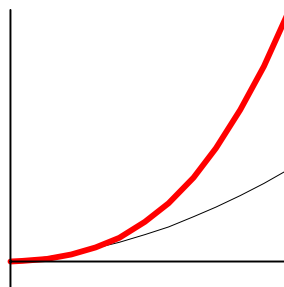
$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ Se } \lim_{x \rightarrow P} f(x) = +\infty, \text{ allora } \lim_{x \rightarrow P} g(x) = +\infty. \\ \cdot \text{ Se } \lim_{x \rightarrow P} g(x) = -\infty, \text{ allora } \lim_{x \rightarrow P} f(x) = -\infty \end{array} \right.$$



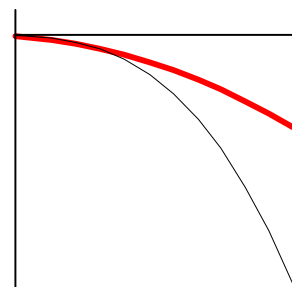
f sottile, g grossa
 $f \leq g$ in $U(1, \frac{1}{2})$



f sottile, g grossa
 $f \leq g$ in $U(1, \frac{1}{2})$



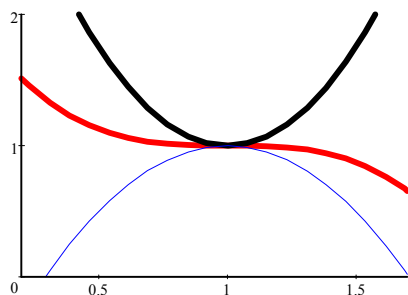
f sottile, g grossa
 $f \leq g$ in $U(+\infty)$



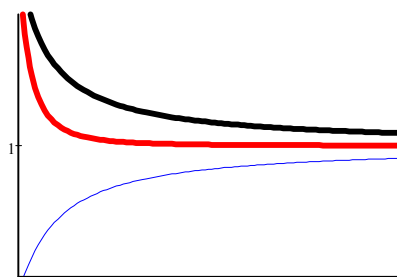
f sottile, g grossa
 $f \leq g$ in $U(+\infty)$

2) Siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno di P .

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow P} f(x) = \lim_{x \rightarrow P} h(x) = L, \text{ allora } \lim_{x \rightarrow P} g(x) = L$$



f sottile, g grossa, h nera
 $f \leq g \leq h$ in $U(1, \frac{1}{2})$

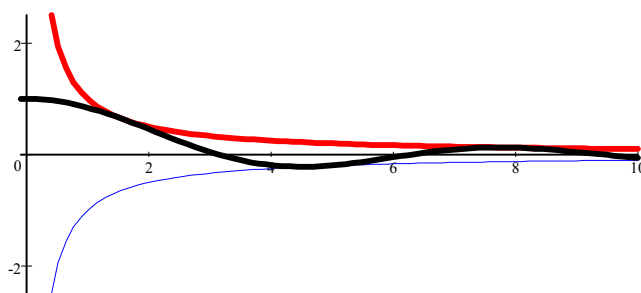


f sottile, g rossa, h nera
 $f \leq g \leq h$ in $U(+\infty)$

Esempi 3.51

- Si vuole calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$. Il limite di $\sin x$ per $x \rightarrow +\infty$ non esiste, ma.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



sottile $-\frac{1}{x}$, rossa $\frac{1}{x}$, nera $\frac{\sin x}{x}$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Quindi dal criterio del confronto segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Si vuole calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$. Il limite di $\sin x$ per $x \rightarrow +\infty$ non esiste ma poiché

$$2x - 1 \leq 2x - \sin x$$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$, dal criterio del confronto segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x) = +\infty$.

- Si vuole calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\log x - \cos \frac{1}{x}}$. Il limite di $\cos \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0^+$ non esiste, ma poiché per $x \in (0, \frac{1}{e})$,

$$\frac{2}{\log x + 1} \leq \frac{2}{\log x - \cos \frac{1}{x}} \leq \frac{2}{\log x - 1}$$

e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\log x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\log x - 1} = 0$, dal criterio del confronto segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\log x - \cos \frac{1}{x}} = 0$.

Corollario 3.52 (al teorema del confronto)

Se $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$ e g è una funzione limitata in un intorno di P , allora

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x)g(x) = 0.$$

Esempi 3.53

- Per calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ si può usare il corollario: $\sin(x)$ è una funzione limitata e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x e^x = 0$, perché $\cos x$ è limitata e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Corollario 3.54

$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow P} |f(x)| = 0$.

Esempio 3.55

$$\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1).$$