# Argomento 8
# Integrali indefiniti

## 8.1 Integrale indefinito

**Definizione 8.1** Assegnata la funzione $f$ definita nell' intervallo $I$, diciamo che una funzione $F$ con $F : I \to \mathbb{R}$ è **una primitiva di $f$ in $I$** se

$$\begin{array}{ll} i) & F \text{ è derivabile in } I; \\ ii) & F'(x) = f(x), \quad \text{per ogni } \; x \in I. \end{array}$$

Per *verificare* se una data funzione $F$ è una primitiva di $f$ nell'intervallo $I$ bisogna quindi controlllare che $F$ sia derivabile in $I$ e che la sua derivata coincida con $f$ in tutti i punti di $I$.

**Esempio 8.2** La funzione $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$.
Infatti, la funzione $\sin x$ è sempre derivabile e inoltre si ha che $(\sin x)' = \cos x$, per ogni $x$.

Data una funzione $f$, *cercare* una sua primitiva in $I$ significa quindi cercare una funzione derivabile $F$ la cui derivata coincida con $f$ (ossia, la ricerca delle primitive è il procedimento "inverso" della derivazione).
Ci poniamo le seguenti domande:

1. data una funzione $f$ esiste sempre una sua primitiva in $I$?
2. se una primitiva esiste, è unica?
3. come trovarla?

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (vedi Arg. 9) risponde alla prima di queste domande implicando che vale la seguente:

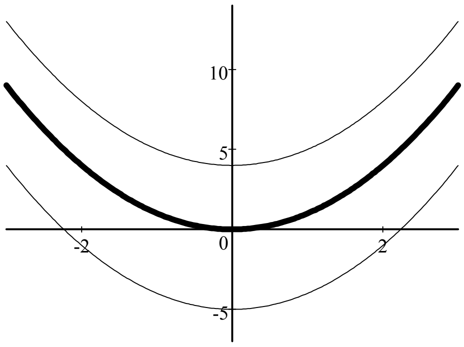
**Proposizione 8.3** *Ogni funzione continua in un intervallo $I$ ammette una primitiva in $I$.*

Quindi almeno per le funzioni *continue* siamo certi dell'esistenza di una primitiva.
In realtà, non solo di una. Infatti osserviamo che le funzioni $F(x) = \sin x$; $G(x) = \sin x + 2003$; $H(x) = \sin x - \pi$; ... sono tutte primitive di $f(x) = \cos x$.
In generale, vale:

**Proposizione 8.4** *Se una funzione $f$ ammette una primitiva $F$ in un intervallo $I$, allora:*
*i) ogni funzione della forma $F + c$ è anch'essa una primitiva di $f$, comunque si scelga la costante reale $c$;*
*ii) ogni altra primitiva $G$ di $f$ in $I$ ha la forma $G = F + c$ per un'opportuna costante reale $c$.*

In altre parole, se la funzione $f$ ammette una primitiva $F$ in $I$, ne ammette infinite che sono esattamente tutte quelle che si ottengono aggiungendo alla funzione $F$ una qualunque costante[1]. Cioè, il grafico di ognuna di esse si ottiene da quello di $F$ per mezzo di una traslazione verticale. Ad esempio, nella prossima figura sono evidenziati i grafici delle funzioni $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 4$, $H(x) = x^2 - 5$; queste tre funzioni sono primitive, in $\mathbb{R}$, della stessa $f(x) = 2x$.

[1] Questo è una conseguenza del Teorema di Lagrange (vedi Arg. 6).




**Definizione 8.5** Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, l'insieme delle sue primitive si chiama **integrale indefinito** di $f$ e si indica con il simbolo $\int f(x)\ dx$.
Quindi,

$$\boxed{\int f(x)\ dx = \{F : I \to \mathbb{R} \text{ derivabili in } I \text{ e tali che } F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in I\}.}$$

La Proposizione 8.4 può essere riformulata dicendo che:

Se $F$ è una primitiva di una data funzione $f$, allora

$$\boxed{\int f(x)\ dx = F(x) + c, \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}.}$$

Nel seguito, con la lettera $c$ indicheremo un'arbitraria costante reale.

**Esempio 8.6** Derivando i termini a secondo membro possiamo verificare che:

- $\displaystyle\int \cos x\, dx \ = \ \sin x + c.$
- $\displaystyle\int 2x\, dx \ = \ x^2 + c.$
- $\displaystyle\int e^x\, dx \ = e^x + c.$
- Nell'intervallo $I_1 = (0, +\infty)$ una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log x$; invece nell'intervallo $I_2 = (-\infty, 0)$ una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log(-x)$. Per brevità si usa scrivere

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c,$$

e questa formula vale in ogni intervallo che <u>non</u> contiene $x = 0$.

Il calcolo esplicito delle primitive può, in generale, rappresentare un problema non banale.
Certamente conosciamo le primitive di molte funzioni elementari, utilizzando la tabella delle loro derivate (vedere Arg. 6).

## 8.2 Tabella delle primitive "immediate"

| | |
|---|---|
| $\int 1 \, dx = x + c$ | (1) |
| $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$ | (2) |
| $\int \frac{1}{x} \, dx = \log\lvert x\rvert + c$ | (3) |
| $\int e^x dx = e^x + c$ | (4) |
| $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad a > 0, \, a \neq 1$ | (5) |
| $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ | (6) |
| $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ | (7) |
| $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$ | (8) |

**Esempio 8.7** Utilizzando la formula (2) ricaviamo:

- $\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c;$
- $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \, x^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \, x^{\frac{3}{2}} + c;$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \, x^{1-\frac{1}{2}} + c = 2 \, x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c;$
- $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \, x^{1+\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} + c$

Mentre con la formula (5) otteniamo:

- $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\log 2} + c.$

**Osservazione.** Notiamo che:

- $\displaystyle\int \cos(x+5)\ dx\ = \sin(x+5)+c$
- $\displaystyle\int e^{3x}\, dx\ = \frac{1}{3}e^{3x}+c.$

Dagli esempi precedenti possiamo dedurre che: se $F$ è una primitiva della funzione $f$ e $a$ e $b$ sono due numeri reali, con $a \neq 0$, si ha

$$\int f(ax+b)\ dx\ = \frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

Questa formula è un caso particolare del metodo di integrazione per sostituzione.

## Proprietà dell'integrale indefinito

Per determinare le primitive di funzioni che si ottengono sommando tra loro le funzioni elementari, e/o moltiplicandole per una costante, è utile la seguente

**Proposizione 8.8** *Siano $f$ e $g$ continue in un intervallo $I$, allora*

*1)* $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)\ dx$, *per ogni* $a \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

**Esempio 8.9** Determiniamo l'integrale indefinito di:

- $f(x) = 3\cos x\ + \dfrac{5}{\sqrt{x}};$

$$\int \left(3\cos x\ + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)\ dx\ =\ 3\int \cos x\, dx\ + 5\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =\ 3\sin x + 10\sqrt{x}+c.$$

- $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x - \dfrac{1}{3}e^x;$

$$\int \left(\frac{4}{x} + 2x - \frac{1}{3}e^x\right)\ dx\ = 4\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int x\, dx - \frac{1}{3}\int e^x\, dx\ =\ 4\log|x| + x^2 - \frac{1}{3}e^x + c.$$

- $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3};$

$$\int \left(\frac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3}\right)\ dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx + 2\int x^{-3}\ dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + c.$$

- $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{x};$

$$\int \frac{(x+2)^3}{x}\ dx = \int x^2\ dx + 6\int x\ dx + 12\int dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\log|x| + c.$$

- $f(x) = \dfrac{x}{x-1};$

$$\int \frac{x}{x-1}\ dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}\ dx = \int dx + \int \frac{1}{x-1}\ dx = x + \log|x-1| + c.$$