Argomento 13
Sistemi lineari

Sistemi lineari: definizioni

▶ Un'equazione nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$ della forma

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = b$$

ove $c_1, \ldots, c_n$ sono numeri reali (detti **coefficienti**) e b è un numero reale (detto **termine noto**) si chiama **equazione lineare in** $x_1, \ldots, x_n$.
▶ **Un sistema lineare di** m **equazioni nelle** n **incognite** $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema formato da m equazioni lineari in $x_1, \ldots, x_n$, ossia:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 + & .. & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 + & .. & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 + & .. & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

▶ Una **soluzione** di $(*)$ è una n-pla di numeri reali $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ che sostituita alle incognite soddisfa simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

▶ La matrice di tipo $(m, n) : A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ si chiama **matrice dei coefficienti del sistema**.

Il vettore colonna di tipo $(m, 1) : \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^{m}$ si chiama **vettore dei termini noti**.

La matrice di tipo $(m, n+1) : (A|\mathbf{b})$ ottenuta accostando alle colonne della matrice A dei coefficienti il vettore (colonna) $\mathbf{b}$ dei termini noti si chiama **matrice completa del sistema**.

Esempio 13.1 Dato il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = -3 \end{array}\right. ,$$

la matrice del sistema, il vettore dei termini noti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

▶ Detto $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{n}$ il vettore colonna di tipo $(n, 1)$ delle incognite il sistema $(*)$ si può trascrivere in forma matriciale

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Una sua soluzione è quindi un vettore colonna di tipo $(n, 1)$ $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_j)_{j=1}^{n}$ di numeri reali che soddisfa la relazione matriciale $A\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.

▶ Un sistema si dice **possibile** (o **risolubile**) se ammette almeno una soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **compatibili**.

▶ Un sistema si dice **impossibile** se non ammette alcuna soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **incompatibili**.

NOTA Un sistema possibile può avere una sola soluzione (**sistema determinato**) oppure infinite soluzioni (**sistema indeterminato**), ma <u>*mai*</u> un numero finito ≥ 2 di soluzioni.

▶ Due sistemi si dicono **equivalenti** quando ammettono le stesse soluzioni.

▶ **Trasformazioni elementari**. Le seguenti trasformazioni, applicate ad un dato sistema, portano a un sistema equivalente:
I) scambiare due equazioni tra loro;
II) moltiplicare i due membri di un'equazione per lo stesso numero k ($\neq 0$);
III) sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per k.

Esempio 13.2 Il sistema dell'Esempio 13.1 è impossibile.
Infatti, sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2, si ottiene il sistema, equivalente a quello iniziale,

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

ma la seconda equazione è impossibile.

Esempio 13.3 Dato il sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$
la matrice del sistema, il vettore dei termini noti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Il sistema ha una sola soluzione. Infatti, sottraendo alla terza equazione la seconda si ottiene il sistema, equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il vettore $(x, y) = (1, 0)$. (Verificarlo.)

Esempio 13.4 Dati $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,
il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = -3 \end{cases}.$$

Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per 3 si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Il sistema ammette quindi le infinite soluzioni della forma $(t, 2t - 1)$, al variare del numero reale t.

Soluzione dei sistemi lineari

I teoremi di Cramer e di Rouché-Capelli

Il Teorema di Cramer permette di stabilire quando un sistema di n equazioni in n incognite (lo stesso numero di equazioni ed incognite) ha una sola soluzione e fornisce un metodo per determinarla attraverso il calcolo del determinante di opportune matrici quadrate.

▶ Si consideri un sistema di n equazioni in n incognite, con $A = (a_{ij})_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}$ matrice dei coefficienti (quadrata di ordine n) e vettore dei termini noti $\mathbf{b}$.
Per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$ si definiscono le matrici A_j quadrate di ordine n, ottenute sostituendo la j–esima colonna di A con la colonna dei termini noti.

Teorema 13.1 (di Cramer) *Il sistema di n equazioni in n incognite*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ha una sola soluzione $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$. *In tal caso, la soluzione è il vettore* $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_j)_{j=1}^{n}$ *con*

$$\widetilde{x}_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Esempio 13.5 Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases},$$

la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det A = -10 \neq 0$, il Teorema di Cramer garantisce che il sistema ha una sola soluzione. Per determinarla costruiamo le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo $\det A_1 = -6$, $\det A_2 = -12$, $\det A_3 = -2$. Allora la soluzione (x, y, z) è data da:

$$\left(-\frac{1}{10} \det A_1, \quad -\frac{1}{10} \det A_2, \quad -\frac{1}{10} \det A_3, \right) = \left(\frac{3}{5}, \ \frac{6}{5}, \ \frac{1}{5} \right).$$

Esempio 13.6 Il sistema $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 5z = -1 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases}$ non ha una soluzione unica.
Infatti, detta A la matrice dei coefficienti si ha: $\det A = 0$.

Quindi, in base al Teorema di Cramer, possiamo escludere che abbia una sola soluzione. Il sistema potrebbe essere impossibile oppure essere indeterminato, ossia ammettere infinite soluzioni.

Nell'esempio precedente non siamo stati in grado di stabilire il comportamento del sistema perchè il Teorema di Cramer ci permette soltanto di escludere che il sistema abbia una sola soluzione. Più in generale, il Teorema di Cramer non si applica a tutti i sistemi, ma soltanto a quelli in cui il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite.

Il teorema successivo (di Rouché-Capelli) risolve il problema della risolubililità del generico sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ attraverso il calcolo della caratteristica (o rango) di opportune matrici.

▶ Si consideri un sistema di m equazioni in n incognite, con $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ matrice dei coefficienti (di tipo (m, n)) e vettore dei termini noti $\mathbf{b}$.

Teorema 13.2 (di Rouché–Capelli) *Il sistema di m equazioni in n incognite*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

è risolubile $\Longleftrightarrow \operatorname{Car} A = \operatorname{Car} (A|\mathbf{b})$.

▶ Quando il sistema è risolubile (cioè $\operatorname{Car} A = \operatorname{Car} (A|\mathbf{b}) = k$), per sapere quante soluzioni ha dobbiamo confrontare il numero k con il numero n delle incognite:

- Se $n > k$ il sistema è *indeterminato* ossia ha infinite soluzioni che dipendono da $n - k$ variabili libere (si dice che il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni).
- Se $n = k$ il sistema è *determinato* ossia ha una sola soluzione.

▶ Inoltre, se il sistema è risolubile, detta k la caratteristica comune delle due matrici, per trovare le soluzioni si procede così:

1. si fissa una sottomatrice A' di A, quadrata di ordine k con $\det(A') \neq 0$ (se $\operatorname{Car} A = k$, esiste certamente un minore A' non nullo di ordine k);

2. si considera un nuovo sistema di k equazioni in k incognite ottenuto considerando solo le k (delle m) equazioni relative alle righe di A' e le k incognite (variabili effettive) relative alle colonne di A'. Le restanti $n - k$ incognite (variabili libere) sono trattate come parametri;

3. si risolve il sistema così ottenuto di k equazioni in k incognite (con determinante della matrice dei coefficienti non nullo) utilizzando, ad esempio, il Teorema di Cramer.

Esempio 13.7 Riprendiamo in esame il sistema dell'Esempio 13.6. La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Si ha: $\operatorname{Car} A = 2$ (prendendo ad esempio le prime due righe e due colonne) e $\operatorname{Car} (A|\mathbf{b}) = 3$, (infatti il determinante della sottomatrice ottenuta prendendo le ultime tre colonne è diverso da zero). Applicando il Teorema di Rouché–Capelli possiamo quindi concludere che il sistema è impossibile.

Esempio 13.8 Dato il sistema $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ 3x+y=0 \\ -x+3y=2 \end{cases}$, risulta $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} -1 & 3 \end{matrix} \end{pmatrix}$ e $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Poichè Car A = Car $(A|\mathbf{b}) = 2$, il sistema è risolubile (è stata riquadrata una sottomatrice con determinante non nullo). Inoltre, poichè la caratteristica è uguale al numero delle incognite, il sistema è determinato ossia ha una sola soluzione.
Per trovarla si risolve il sistema formato dalle prime due equazioni e si trova la soluzione $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Esempio 13.9 Dato il sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2x+z=0 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$, risulta $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 & 2 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$ e $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Poichè $\det A = 0$ bisogna applicare il Teorema di Rouché–Capelli.
Si ha che Car A =Car $(A|\mathbf{b}) = 2$ e quindi il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni che dipendono da una variabile libera.
Per determinare le soluzioni, si considera il sistema delle prime due equazioni nelle prime due incognite (variabili effettive), considerando z come variabile libera:

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ -2x=-z \end{cases}$$

che ha soluzione $(\frac{1}{2}z, 1-\frac{3}{2}z)$. Quindi le soluzioni del sistema assegnato sono i vettori:

$$(\frac{1}{2}z,\ 1-\frac{3}{2}z,\ z) \qquad \text{al variare di } z \in \mathbb{R}.$$

Esempio 13.10 Discutere la risolubità al variare del parametro reale k, e trovare le eventuali soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y+2z=0 \\ 2x-y=0 \\ x-y-z=k \end{cases}.$$

Poichè $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ e $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & k \end{array}\right)$, da $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 11$

si ha: Car $A = 3$, mentre $\det(A|\mathbf{b}) = 11k+1$.

Quindi, se $k \neq -\frac{1}{11}$ il sistema è impossibile perchè $3 = \text{Car } A \neq \text{Car } (A|\mathbf{b}) = 4$.

Se $k = -\frac{1}{11}$ allora Car A = Car $(A|\mathbf{b}) = 3$ e il sistema è determinato. Per trovare la soluzione si risolve il sistema delle prime tre equazioni e si trova $(\frac{2}{11},\ \frac{4}{11}, -\frac{1}{11})$.