

LEMMA

$$\bigoplus_{i \in I} E_i$$

$$\bigoplus_{i \in I} F_i$$

⌊

$$E_i \xrightarrow{f_i} F_i$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\bigoplus E_i \xrightarrow{\bigoplus f_i} \bigoplus F_i$$

f_i iniettivo $\forall i \iff \bigoplus_{i \in I} f_i$ è iniettivo

Dim (ex)

Proposizione $(\pi_i)_{i \in I}$ A-mod

M_i è piatto $\forall i \iff \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ piatto

Dim

$$f: L \longrightarrow P \text{ iniettivo}$$

$$L \otimes \left[\bigoplus_{i \in I} \pi_i \right] \xrightarrow{f \otimes 1} P \otimes \left[\bigoplus_{i \in I} \pi_i \right]$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\bigoplus_{i \in I} (L \otimes \pi_i) \xrightarrow{\bigoplus (f \otimes \pi_i)} \bigoplus_{i \in I} P \otimes \pi_i$$

$\forall i: f \otimes 1_{\pi_i}$ è iniettivo

$\bigoplus_{i \in I} R_i$ è piatto $\Leftrightarrow \forall_{i \in I} R_i$ è piatto (2)

□

• TUTTI I ~~PER~~ LIBERI SONO PIATTI
 R libero $R \cong A^{(S)}$ è piatto perché

A è piatto

• TUTTI I PROIETTIVI SONO PIATTI

P proiettivo $\Rightarrow \exists N$ t.c.

$$P \oplus M = A^{(S)}$$

$\Rightarrow P$ è allora piatto

Il viceversa non è vero:

\otimes è piatto (lo vedremo adesso)

non vice è proiettivo

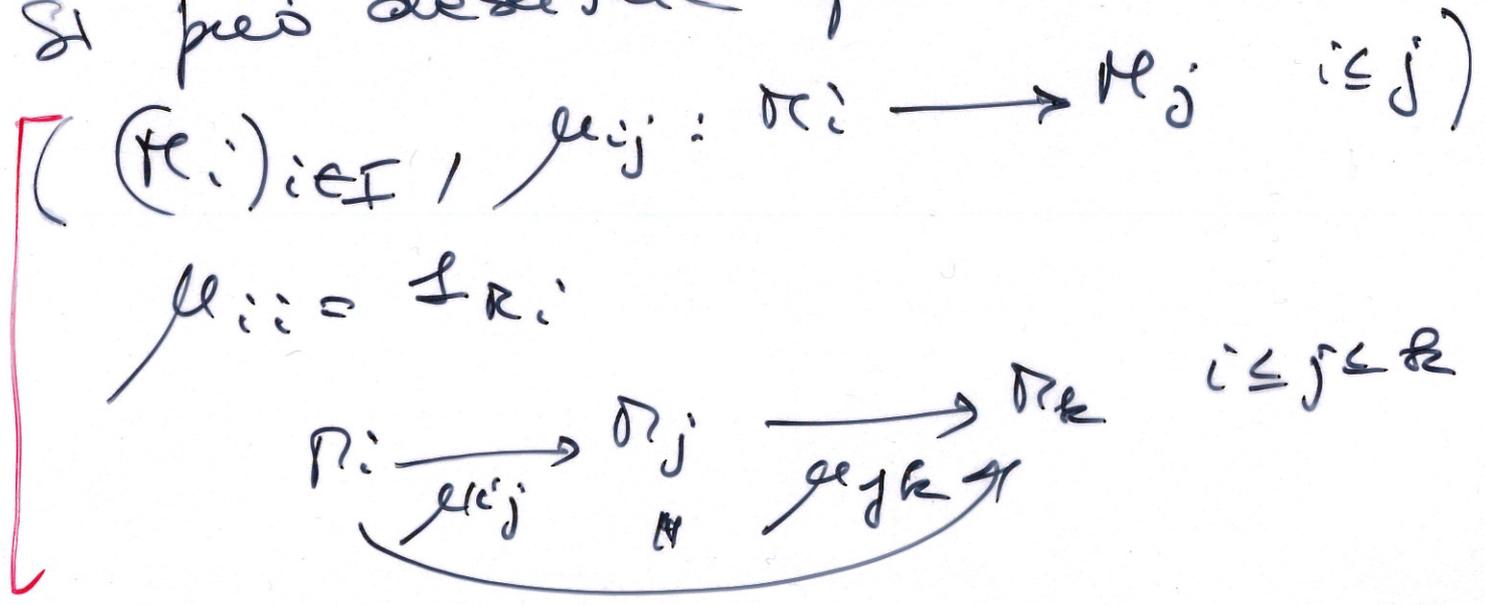
LIMITE DIRETTO & A-MODULI

Def I insieme parzialmente ordinato & dice
insieme diretto & $\forall i, j \in I$

$$\exists k \quad k \geq i \quad \& \quad k \geq j$$

Df $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ è una
 d'operazione diretta se I è una
 insieme diretto

Un insieme diretto di A -Moduli
 non è altro che una collezione
 su un diagramma diretto $D: I \rightarrow A\text{-Mod}$
 si può descrivere quindi come



Sistema diretto

Una sua collezione sarà quindi
 dato da $(M, \mu_i: M_i \longrightarrow M)$ con
 la solita prop universale di

collezione e si ricorre con
 nota il suo dual
 la parte inverso e
 si indica $\mu_{ij}: M_j \longrightarrow M_i$

linea $\mu_i = \pi$ es può ottenere così!

$\bigcup_{i \in I} M_i$ come insieme e v!

definisco una relazione \sim :

$x_i \sim x_j$ e $\exists k$ t.

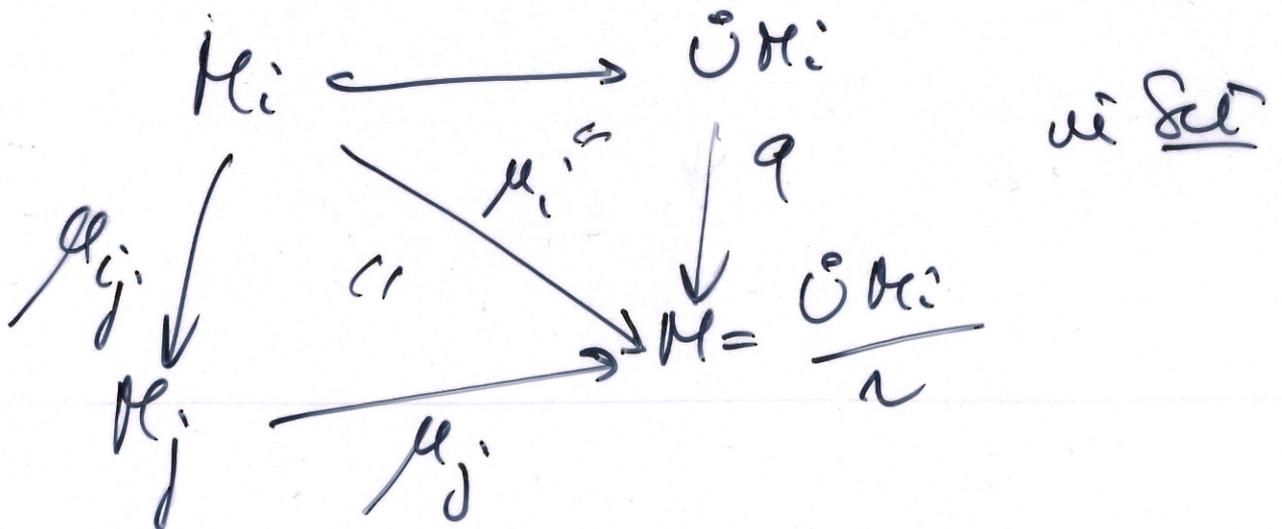
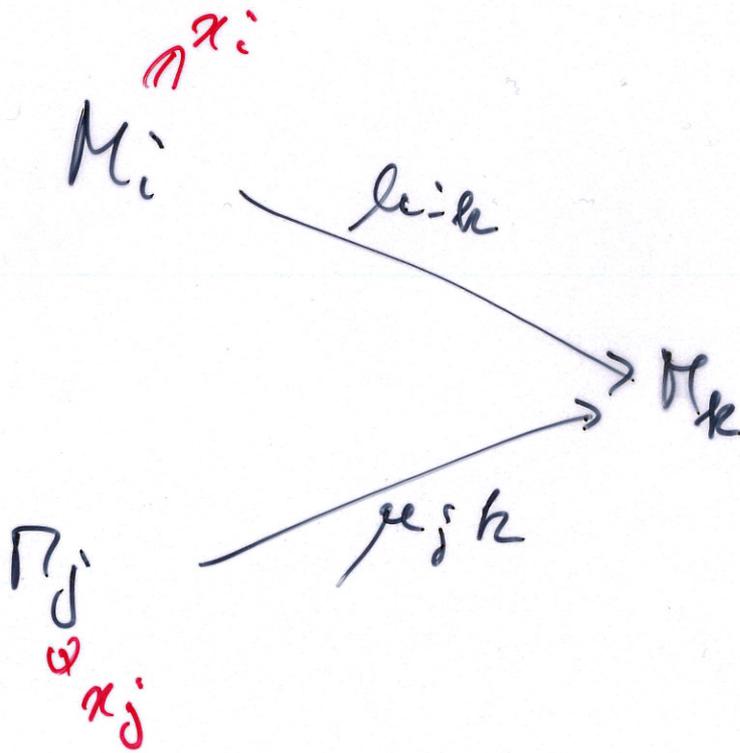
$$\mu_{ik}(x_i) = \mu_{jk}(x_j)$$

\sim è una

relazione di equivalenza

sul $\bigcup_{i \in I} M_i$

$$M := \frac{\bigcup_{i \in I} M_i}{\sim}$$



$$[x_i] \in \mathcal{H}$$

$$[x_j] \in \mathcal{H}$$

$$x_i \in \mathcal{D}_i \\ x_j \in \mathcal{D}_j$$

$$[x_i] + [x_j] = \left[\mu_{ik}(x_i) + \mu_{jk}(x_j) \right]$$

$$\exists k \geq i, j$$

source $\in \mathcal{D}_k$

EX è ben definita

$$a \cdot [x_i] = [a x_i]$$

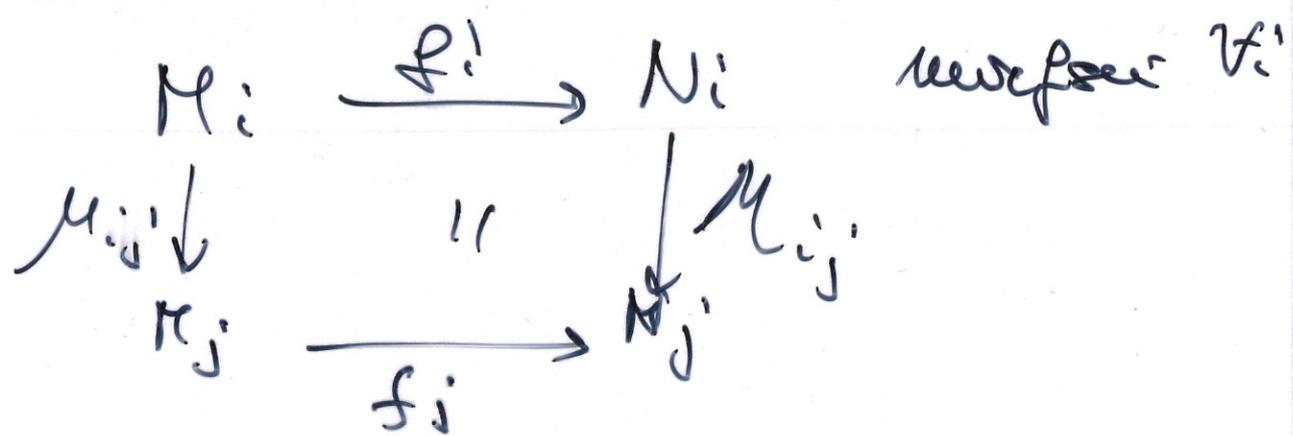
questo dà a \mathcal{H} una struttura di A modulo per cui

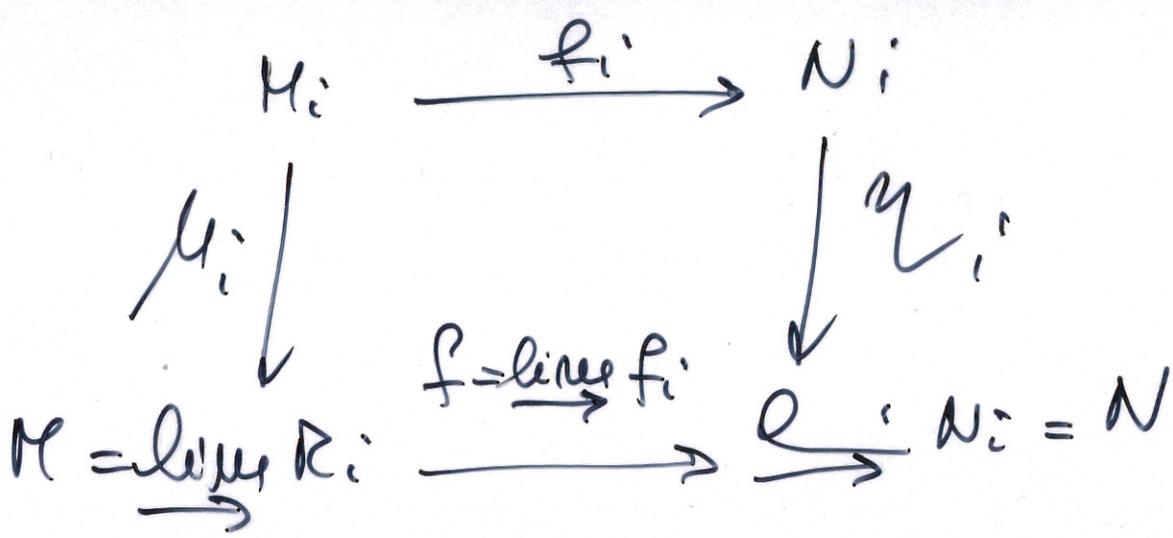
$$\mu_i : \mathcal{D}_i \longrightarrow \mathcal{H} \text{ sono morfismi}$$

anche la μ universale è semplice da vedere

$$[(\mu_i)_{i \in I}, \mu_{ij}] \quad [(\mathcal{N}_i)_{i \in I}, \nu_{ij}]$$

sistemi diretti see I diretti





$f[x_i] = [f_i(a_i)]$ è ben definita

se $\forall i: f_i$ è iniettivo \Rightarrow $\varinjlim f_i$ è iniettivo (EX)

come si relaziona con \otimes ?

$$L \otimes (\varinjlim M_i) \cong \varinjlim (L \otimes M_i)$$

$L \otimes$ - preserva i colimiti

Proposizione

Limiti diretti di moduli F.A.T.T.I
sono F.A.T.T.I

Due suppo M_i posto $\forall i$

(M_i, μ_{ij}) sistema diretto

$$L \xrightarrow{f} P \quad \text{unitario } \mathbb{Z}$$

$$L \otimes R_i \xrightarrow{f \otimes 1_{R_i}} P \otimes R_i \quad \text{unitario}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{lim} (L \otimes R_i) & \xrightarrow{\text{lim} (f \otimes 1_{R_i})} & \text{lim} (P \otimes R_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L \otimes \text{lim} (R_i) & \xrightarrow{f \otimes 1_{\text{lim} (R_i)}} & P \otimes \text{lim} (R_i) \end{array}$$

$$f \otimes 1_{R_i} \text{ unitario} \Rightarrow \text{lim} (f \otimes 1_{R_i}) \text{ unitario}$$

$$\Rightarrow f \otimes 1_{\text{lim} (R_i)} \text{ unitario} \quad \square$$

• $K(A)$ è PIATTO (A - dominio)
 " campo delle frazioni di A

$$r, s \neq 0$$

$$\langle \frac{1}{r} \rangle \hookrightarrow \langle \frac{1}{s} \rangle$$

$$\frac{1}{r} \in \langle \frac{1}{s} \rangle \Leftrightarrow \frac{1}{r} = p \cdot \frac{1}{s}$$

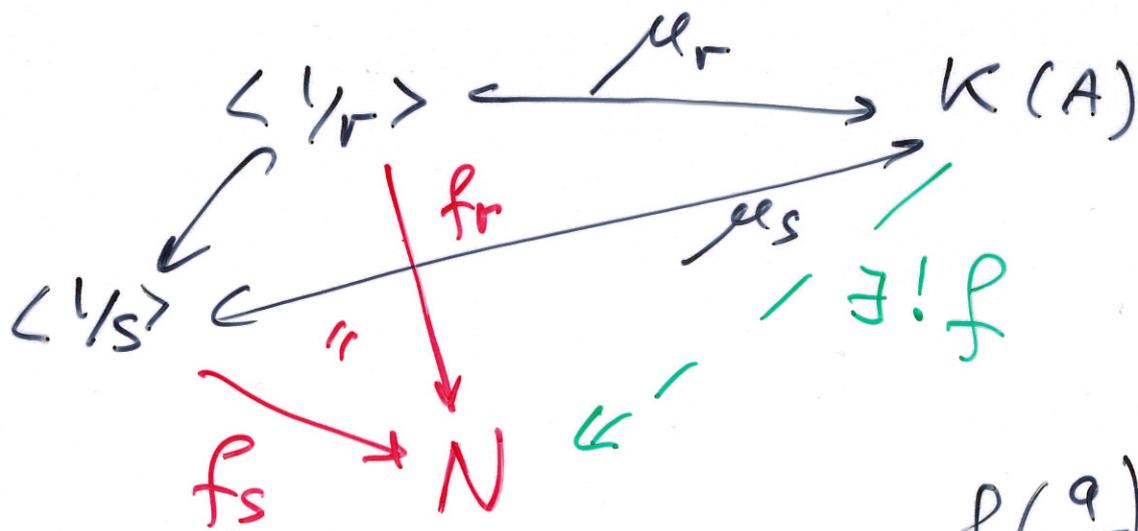
$$r \cdot p = s \quad r | s$$

$r | s$

questo due per ordine su $A \setminus \{0\}$
 che è diretto: dati $a, b \in A \setminus \{0\}$
 $a \mid ab$ $b \mid ab$

considero la famiglia di
 sotto-moduli $\{ \langle \frac{1}{r} \rangle \mid A \setminus \{0\} \}$ con
 questo ordine dei loro (con
 le inclusioni) a un sistema
 diretto di A -moduli

TS $\lim_{r \in A \setminus \{0\}} \langle \frac{1}{r} \rangle = K(A)$



$$f\left(\frac{a}{r}\right) := f_r\left(\frac{a}{r}\right)$$

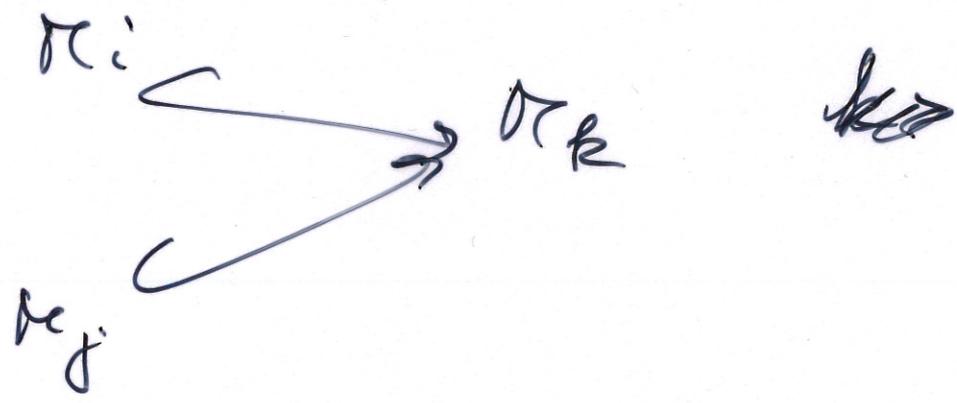
dati $f_r : \langle \frac{1}{r} \rangle \rightarrow N$
 $r \in A \setminus \{0\}$

è ben definito
 ed è un
 morfismo (EX)

CASO PARTICOLARE DI LIMITI DIRETTI

M famiglia diretta di sottomoduli
con ordine dato dall'indice
grosso

$$(M_i)_{i \in I} \quad \sigma_i \subseteq M$$



linee $M_i^\circ = \cup M_i = \sum M_i$

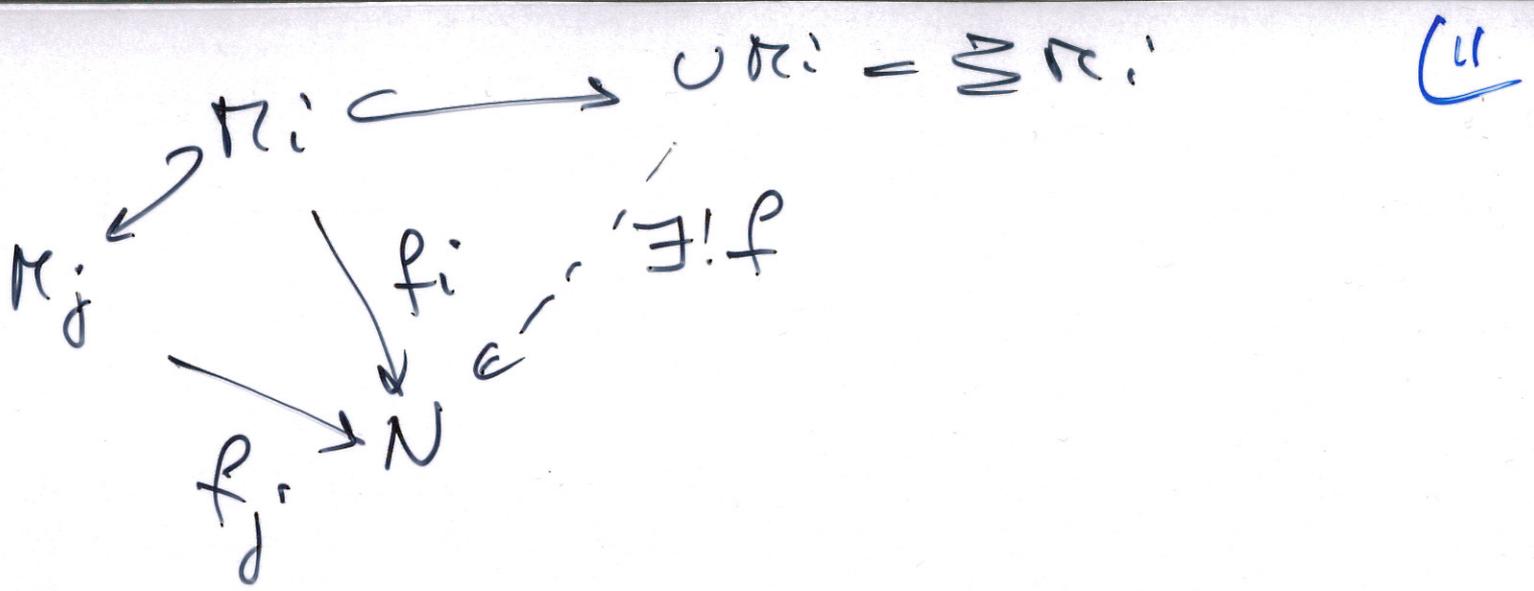
linee $\cup M_i \subset \sum M_i$

vice $m_{i_1} + \dots + m_{i_n} \in \sum M_i$

$\exists k \geq i_1, i_2, \dots, i_n \quad M_{i_j} \subseteq M_k$

$m_{i_1} + \dots + m_{i_n} \in M_k \subseteq \cup_{i \in I} M_i$

$\Rightarrow \cup M_i = \sum M_i$



Condizione $\mathcal{F} = \{ \text{sottomoduli } f-g \}$
di M

è diretta dall' inclusione

\Rightarrow ogni modulo è limite
diretto dei suoi ~~sub~~ sottomoduli
f-g.

se tutti i sottomoduli f-g sono proiettivi
 $\Rightarrow M$ è proiettivo