

SEC

(1)

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} R \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} ? & L \otimes N & \xrightarrow{f \otimes 1} & R \otimes N & \xrightarrow{g \otimes 1} & P \otimes N & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \delta & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$\text{Tor}(L, N) \xrightarrow{f_N} \text{Tor}(R, N) \xrightarrow{g_N} \text{Tor}(P, N)$$

soziale und seelische
Probleme Tor(-, N): A-modul \rightarrow A-modul

$$\text{Tor}(A, N) = 0 \quad \forall L \iff N \text{ ist perfekt}$$

$$\text{Tor}(A, N) = 0$$

MODULE NOETHERIANI & ARTINIANI

Proposizione

X poset . Sono equivalenti

① ogni catena è stacionaria

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

$$\exists \bar{u} \text{ t.c. } x_i = \bar{u}$$

② ogni sottoinsieme di X $T \neq \emptyset$
ha elementi massimali

Dimo $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$

Sia $T \subseteq X$ $T \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in T$

x_1 è max, in T

se no, $\exists x_2 > x_1$

Vado ad averti di questo modo

Se dopo n passi non ho ancora
trovato max $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq$
costituisce una catena che si

deve fare parte di un $x \in T$ tale che
sia nel insieme T

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}$$

Dato che x è $\in X$

$$x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

e ogni termine costituisce un
insieme $T \neq \emptyset$, che ora è misurabile
 \Rightarrow lo stesso è strutturale

Dato M A -modulo

X = insieme dei sottomoduli di M

(X, \subseteq)

(X, \supseteq)

"descending"
"ascending" closure

$\textcircled{1}$ diretto

dc

\uparrow cosi' ha "acc"

$\textcircled{2}$ ordine totale
misurabile
minimale

Def un modulo che soddisfa una
o queste 2 condizioni si dice:
NEDERLANDO
ARTINIANO

Df Un anello A si dice ⁽⁴⁾
NOETHE REGO
ARTINIANO
se lo è come A -modulo

ESEMPI

① Ogni A -modulo finito è noeth + art
(in realtà basta che il rettangolo
di sottomoduli sia finito)

② k campo è noeth + art

③ \mathbb{Z} $(n) \subseteq (m) \Leftrightarrow m | n$

$$n \in (m)$$

$$n = am$$

divisioni di n che sono in
numeri finiti \Rightarrow vole acc

\mathbb{Z} noeth è art se

$$(2) \cong (\mathbb{Z}^2) \cong (2^3) \cong \dots$$

vole d.c.c

④ k campo

$k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ anello di
polinomi è indeterminato $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

(5)

$$(x_1) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq (x_1, x_2, x_3) \subset \dots \subset$$

mais elle est non stacionnaire.

NON è ADF

$$(x_1) \supseteq (x_1^2) \supseteq (x_1^3) \supseteq \dots \supseteq$$

cette fois, elle est stationnaire

Vediamo che $k[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriana sempre nei suoi anelli

$$5) C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ f cont}\}$$

$$I_m = \{f \mid f(x) = 0 \quad x \geq m \in \mathbb{N}\}$$

$$\begin{matrix} & \text{INCREASI} \\ m & n+1 \end{matrix}$$

$$I_m \subset I_{m+1} \subset I_{m+2} \dots$$

elle est alors non stacionnaire

est-elle alors

est-elle alors?

Proposizione

\cap A-modulo

R è noeth \Leftrightarrow ogni suo sottomodulo
è f.g.

Corollario

M noeth $\Rightarrow R \in \text{f.g.}$

Dimo

$\Rightarrow \text{Supp } M$ noeth. $N \subseteq R$ sottomodulo

$$\Sigma = \{ P \subseteq N \mid P \text{ f.g.} \}$$

$(\circ) \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \neq \emptyset$ per noeth.

esiste elemento massimale N_0

in Σ perché N_0 è f.g. $N_0 \subseteq N$

Se $N_0 \neq N$ $\exists x \in N \setminus N_0$

$N_0 \subset N_0 + \langle x \rangle \subseteq N$ ed è f.g.

ASSURDO $\Rightarrow N_0 = N$

\Leftarrow suffice que ogni sottosistema di P L7
 sia f.g. e consideriamo

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$$

$N = \bigcup M_n$ è un sottosistema di P

\Rightarrow è generato da x_1, \dots, x_r

$$x_i \in M_{m_i} : \text{se } m := \max_{i=1}^r m_i$$

$$x_1, \dots, x_r \in M_m = \bigcup M_n = M$$

\Rightarrow le catene sono stanziate

□

quelli
 PID \Rightarrow 'noetheriani'

ATTENZIONE

NON VATE lo stesso

per i 'modelli' articolari

$$M = \left\{ \left[\frac{a}{r^n} \right] \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

φ primi

$$K \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ma non è f.g.

EX

Proposizione

$N \subseteq M$ & consideriamo \mathfrak{t}/N

M è noetheriano
art $\iff N \in \mathfrak{t}/N$ sono
noetheriani
art

Dimo

\Rightarrow Se \mathfrak{t}/N è noetheriano
art

sottomoduli di N sono sottomoduli
di M \Rightarrow le noetheriane di N
sono passate a M

sottomoduli di M/N corrispondono

a sottomoduli di M che contengono

N : pertanto gli uni contengono

gli altri: ci sono infatti solo finiti

moduli di M , quindi sottomoduli

\Leftrightarrow Sia $M_0 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$
una catena di sottomoduli di M

Sia $N_m = M_m \cap N$ catena in N

$\frac{M_m + N}{N} \subseteq \mathfrak{t}/N$ catena in M/N

pride N e M/N sono nuotele (9)

$$\Rightarrow \exists m \quad R_m \cap N = R_{m+1} \cap N = \dots$$

$$\frac{R_m + N}{N} = \frac{R_{m+1} + N}{N} = \dots$$

T5 $R_m = R_{m+1} = \dots$

$$\frac{M_m}{M_m \cap N} = \frac{R_m + N}{N} = \frac{R_{m+1} + N}{N} \approx$$
$$\frac{R_{m+1}}{R_{m+1} \cap N}$$

$$\Rightarrow R_m = R_{m+1} = \dots$$

(10)

I Corollary

$$0 \rightarrow L \rightarrow R \longrightarrow P \rightarrow 0$$

Dato line SEC

H_i è noether
(art) $\Leftrightarrow P \in L$ lo sono

II corollary

$(H_i)_{i=1}^n$ A-moduli

H_i è noether $\Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^n H_i$ è noether
(art)

Def \Rightarrow

$$0 \rightarrow \pi_1 \longrightarrow \pi_1 \oplus \pi_2 \longrightarrow \pi_2 \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \pi_1 \oplus \pi_2$ noether (art)

$$0 \rightarrow \pi_1 \oplus \pi_2 \longrightarrow \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3 \longrightarrow \pi_3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+1} \pi_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \pi_i \longrightarrow \pi_n \rightarrow 0$$

ATTENDEANCE

NON STATES PER

\oplus H_i
 $i \in \omega$

$$H_1 \subseteq R_1 \oplus H_2 \subseteq R_1 \oplus R_2 \oplus H_3 \dots$$

poss. were eaten are more ~~steak~~

Corollary

$$A^{(n)} \text{ es moest} \Leftrightarrow A \text{ es moest} \\ (\text{art}) \qquad \qquad \qquad (\text{art})$$

Proportion

Sie A andes moet (art)

M A -moest f. g.

(art)

$\Rightarrow M$ es ein A -moest moet
 (art)

Denn $R \in f.g. \Rightarrow M \cong \frac{A^{(n)}}{N}$

A moet $\Rightarrow A^{(n)}$ moet $\Rightarrow R$ moet
 (art) $\qquad \qquad$ (art) $\qquad \qquad$ (art)

Se A è noether

(12)

A-mod noether \equiv A-mod f.g.

Prop V k-spazio vett

V ha dim finita \Leftrightarrow V è noether
e art

Dove

k campo \Rightarrow art + noether \Rightarrow

V è art e noether

Viceversa, Sepp V noether d'
dim finita $(v_i)_{i \in N}$ l. c.

$U_n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$U_n \subseteq U_{n+1} \subseteq \dots$

esse catene ascendente non
stazionarie

$W_m = \langle v_{m+1}, \dots \rangle >$ catene discendenti
non stazionarie

- A noether $\Rightarrow I$ ideale di A 13
 $\Rightarrow A/I$ noether

- $A \subseteq B$ $\Rightarrow A$ sottanello di B

Ex B è f.g. come A -modulo
e A è noether $\Rightarrow B$ è noether
come A -modulo

$$\{I_1\} \leq \{I_2\} \leq \dots \leq I_n \subseteq \dots$$

ideale di B sono solo A -moduli
 $\Rightarrow B$ è noether anche come
modulo

Ex $\mathbb{Z}[i]$ è f.g. come
 \mathbb{Z} mod \mathbb{Z} è noether
 $\Rightarrow \mathbb{Z}[i]$ è noether

TEOREMA DE LA BASE DI HILBERT

(14)

A noeth $\Rightarrow A[\alpha]$ noeth.

Dimostrazione:

A noeth $\Rightarrow A[x_1, \dots, x_n]$ noeth.

$$(A[\alpha_1, \alpha_2] \cong (A[\alpha_1])([\alpha_2]))$$

Dalle I è ideale di $A[\alpha]$

$$I_A = \{a \in A \mid a \text{ coeff di } p(x) \in I\}$$

$\exists x$ è l'ideale di A

$\Rightarrow I_A$ finitamente generato