

# DIMENSIONE DI KRULL

A anche

$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$  (successioni  
di ideale catene di  
lunghezza  $n$ )  
dove  $A = \text{sep} \{ \text{lunghezza di catene  
di prime in } A \}$

(frazioni ordinate dove  $A = \mathbb{Z}$ )

in campo  $(0)$  è primo

dove  $k = 0$

$\mathbb{Z} \quad (0) \subset (p)$  tutte le  
 $\Rightarrow$   $p$  primo possibili catene

dove  $\mathbb{Z} = 1$

Ex  $A$  PID  $\dim A = 1$

Th  $A$  noetheriano  $\Rightarrow \dim A[x_1, \dots, x_n] = \dim A + n$

$\mathbb{Z}[x] \quad (0) \subset (p) \subset (p, x)$

$\mathbb{Z}_6$  (0) non è primo  
gi' here' idee' prime sono  
(2) e (3), che sono anche  
max

$$\Rightarrow \dim \mathbb{Z}_6 = 0$$

ma  $\mathbb{Z}_6$  è frutto  $\Rightarrow$  è arbitrario

### Proprietà

$A$  arbitrario  $\Rightarrow \dim A = 0$

### Dimo

Se (0) è primo  $\Rightarrow A$  dominio + art  $\Rightarrow$  campo  
 $\dim A = 0$

& (0) non è primo, essendo qui  
primi messi insieme, allora  $A = 0$

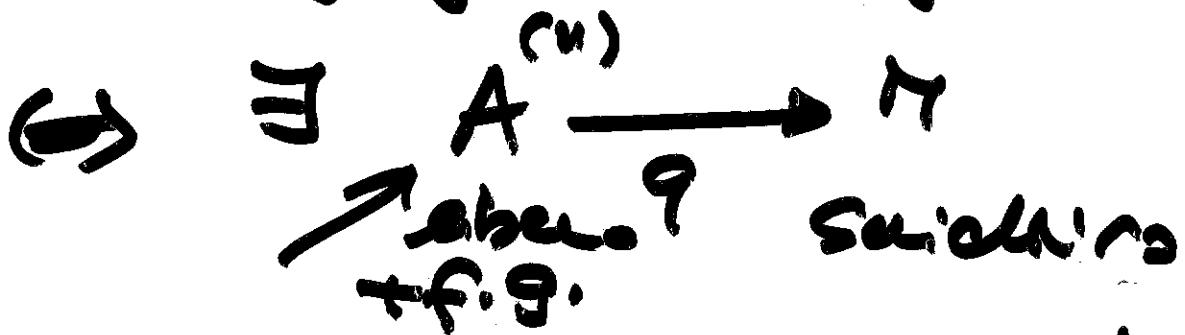
~~(P)~~ P primi sono solo composti  
primi di 1 retto

---

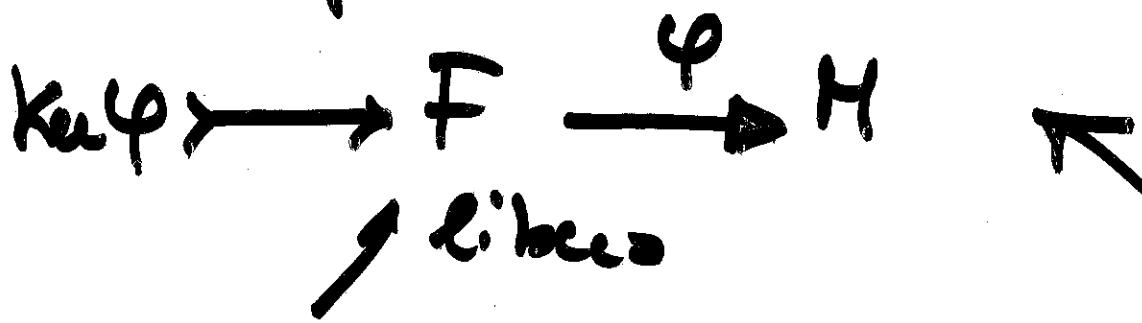
Th Ma anche  $A$  è arbitrario  
 $\Leftrightarrow A$  è nullo e  $\dim A = 0$

H A - muscle

H è f.g. (fun genera)



og. mu die es H ist obne  
come present of seu Elter



Df H è detto con Selezione:  
Ruite (f.r.) &  $\exists$   
una presentazione libera  
con free φ f.g.

Df H è Ruitamente  
permetto (f.p.) ↳

Ex. the s. class

$$\begin{array}{ccccc} A^{(3)} & \xrightarrow{f} & A^{(n)} & \xrightarrow{\varphi} & N \rightarrow 0 \\ & \searrow & \uparrow & & \\ & & \text{M}_3 \cong \ker \varphi & & \end{array}$$

f.g.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{\text{ker } \varphi} & A^{(n)} & \xrightarrow{\varphi} & R \rightarrow 0 \\ \text{f.g.} & & \text{f.g.} & & \end{array}$$

$$n \text{ f.p.} \Rightarrow f.g + f.v.$$

?

Bsp

A smooth

obj. need f.g.  $\bar{e}$  f.p.Dim

$$\ker \varphi \longrightarrow A^{(s)} \xrightarrow{\varphi} M$$

"                          smooth.

f.g.

fibration or we need weak

D

Se  $A$  é now smooth

we have the excess d'

f.g. now f.p.

Bsp

$$P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

(seq. exact)

f.g.  $\implies N$  é f.g.

Dalle Soppr  $P$  generato da ⑥

$a_1 \dots a_n$

$\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$  le immagini in  $N$   
sono generate da  $f(a)$  d'inf =  
Berg

$H \cong N/\text{ker } f$  se  $f \circ P$  è f.g.

diciamo che  $[b_1] \dots [b_s]$

TS  $\{ \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n, b_1 \dots b_s \}$

generano  $N_s$ : infatti  $x = \alpha \in N$

$$[x] = \sum_{i=1}^s r_i [b_i] \quad r_i \in A$$

$x - \sum_{i=1}^s r_i b_i \in \text{ker } g$

$$\sum_{j=1}^n s_j \bar{a}_j \Rightarrow x = \sum_{i=1}^s r_i b_i + \sum_{j=1}^n s_j \bar{a}_j$$

□

$$(ii) \quad 0 \rightarrow P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R \rightarrow 0 \quad \text{+}$$

$\sec.$  core  $R$  f.p.  $\in N$  f.g.

$\Rightarrow P$  f.g.

Dire  $R$  è f.p. allora  $\exists$   $\sec$

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} A^{(s)} \xrightarrow{q} R \rightarrow 0$$

$\exists! \beta$  f.g.  $\text{if } \textcircled{1}, \exists \alpha \text{ " } //$

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R \rightarrow 0$$

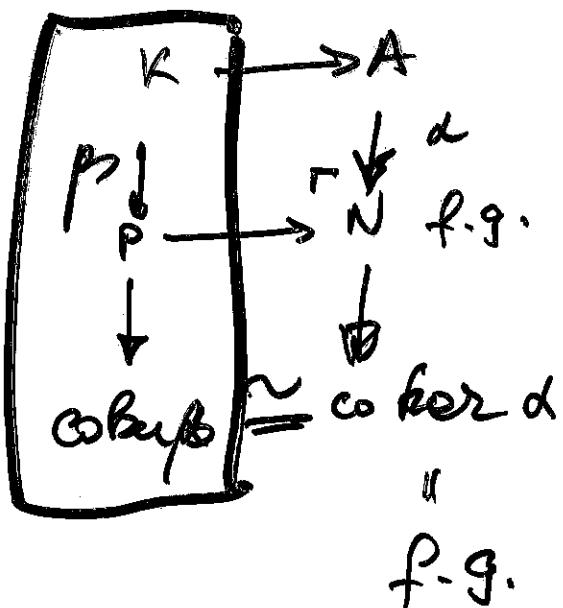
$A^{(s)}$  è lib  $\Rightarrow$  per il  $\alpha$   $\exists \alpha$

$$g \alpha = q$$

$$g(\alpha_i) = 0 \Rightarrow \exists p: K \rightarrow P$$

$$\text{f.c. } fp = \alpha^i$$

$\textcircled{1}$  è allora un push out



(EX)

$$\text{coker } d \cong \text{coker } \beta$$



$$\text{coker } \beta \in \text{f.g.}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \text{coker } f & \longrightarrow & 0 \\
 \text{f.g.} & & & & \text{f.g.} & & 
 \end{array}$$

Se q. esatta

$$\Rightarrow P \in \text{f.g.}$$

D

ESISTENZA DI PRODUO f.g.  
MASS f.p.

A mass moltip.  $\Rightarrow \exists I$   
mass f.g.

(9)

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$$

f.g.

SEC

&  $A/I$  f.g. f.p. (e non  
solo f.g.) allora  
anche  $I$  sarebbe f.g.

ASSUNTO

□

LEMMA DI SCHANZL

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{q} N \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{q'} N \rightarrow 0$$

$P, P'$  f.p.  $\Rightarrow K \oplus P' \cong$   
 $K' \oplus P$

Other Rationale P-functors,  $\exists d: P \rightarrow P'$   
 $e/\beta: K \rightarrow K'$  come from tells  
 due

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{q} M \rightarrow 0$$

$$\downarrow p \quad \textcircled{1} \quad \downarrow d \quad \parallel t_0$$

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{q'} M \rightarrow 0$$

Con  $(f, \alpha, t_n)$  surfaces of SEC  
 over  $i$  means

$\Rightarrow \textcircled{1}$  is the p.o.  $\Rightarrow$

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{\langle \beta, i \rangle} K' \oplus P \xrightarrow{(-\alpha)} P' \rightarrow 0$$

$\bar{e}$  uses SEC (product  $\times$  ex)

die fläche  $\in P'$

$$\Rightarrow \bar{e} \text{ spezialisiert } K' \oplus P \cong K \oplus P' \quad \square$$

$\text{R f.g.} + \text{f.r.} \rightarrow \text{f.p.}$

(10)

$0 \rightarrow K \rightarrow A^{(3)} \xrightarrow{\quad} H \rightarrow 0$  f.g.

$0 \rightarrow K' \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow 0$  f.r.  
f.g.  $\downarrow$  lib.

$K \oplus F \cong A^{(3)} \oplus K'$

" f.g.  
f.g.

$\Downarrow$   
 $K \oplus F$  same f.g.

$A, B \in CRing$

$f: A \rightarrow B$  omo d' anelli  
mediante  $f$  ottenuta su  $B$  una

struttura d'  $A$ -modulo

$$a \cdot b = f(a) \cdot b$$

$\uparrow$  prodotto in  $B$

Le prodotti in  $B$  risultano bilineari  
rispetto a queste strutture d'  $A$ -mod

$$( \Rightarrow ) \quad \cdot : B \otimes_A B \longrightarrow B$$

$$( \Leftarrow )$$

$B$  dunque così vede le operazioni su  $A$   
ass., commutativa  
associativa

(1)

Df  $A \in CRng$

B si dice  $A$ -algebra se  
è un  $A$ -modulo dotato di un  
prodotto  $[ , ] : B \times B \longrightarrow B$   
BILINEARE rispetto alla struttura  
di  $A$ -modulo

- $[ax+by, z] = a[x, z] + b[y, z]$
- $[z, ax+by] = \dots$

Se il prodotto  $[ , ]$  su  $B$  dà  
una struttura di modulo  
 $\Rightarrow B$  è detto  $A$  - algebra associativa  
(associativa)

Se è moltiplicabile commutativo  $\Rightarrow B$   
è algebra commutativa

Ex

$\text{End}(M)$        $M$  -  $A$ -modulo  
 $k[x]$        $k$  campo scalare

Alephne di Lie  $\mathcal{L}$ :

$\mathcal{L}$  A module +

$[, ] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  bilineare con

- $[x, x] = 0 \Rightarrow [x, y] = -[y, x]$

- (IDENTITÀ) di JACOBI

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

DA QUI OTTENI AD 2) che

$$[x, [y, z]] - [x, y], z] = [[z, x], y]$$

Se B è aep ass. costituisce  
un prodotto di Lie

$$[x, y] := xy - yx$$

D'ORA INPO, PARLEREMO SOLO DI  
alephne ass (UNIT)

B A-aep ass  $\Rightarrow$  ha una struttura  
di quella unitaria (ma non  
comutativa)

Poss. off  $f: A \rightarrow B$

$$\begin{matrix} & a \\ & \downarrow \\ a \cdot 1_B \end{matrix}$$

S' be due

- 1)  $f$  è una omo di anelli
- 2)  $f(a) \in$  Rechte  $B = \{x \in B \mid xy = yx \quad \forall y \in B\}$

Vice, dato  $f$  omo  $A \rightarrow B$   
di anelli

coe ②  $B$  diretta esse A-algebra  
associativa  $a \cdot b = f(a)b$

Corollary  $\times B$  ~~esiste~~  $\leftarrow CR\text{ings}$

$\Rightarrow$  ② è anello  $\Leftrightarrow$   
general'  $B$  è A-algebra com.

$\Leftrightarrow f: A \rightarrow B$  di anelli

De provare per EX