

# ESERCIZI

(1)

1) Sia

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \alpha' & \textcircled{1} & \downarrow \alpha \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0
 \end{array}$$

un morfismo di sec. Allora  
il diagramma  $\textcircled{1}$  è un p.b.

Scrivere e dimostrare le proprietà  
duali.

2)  $F: A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$

$F$  additivo. Dimostrare che

se  $0$  è lo zero oggetto

$\Rightarrow F(0)$  è ancora lo zero oggetto

$$F: A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$$

$F(0) = 0$ ,  $F$  preserva i kernel

- $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M$  esatta

- $\Rightarrow 0 \longrightarrow F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M)$  "

- $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$  esatta

- $\Rightarrow 0 \longrightarrow F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N)$  esatta

DMU

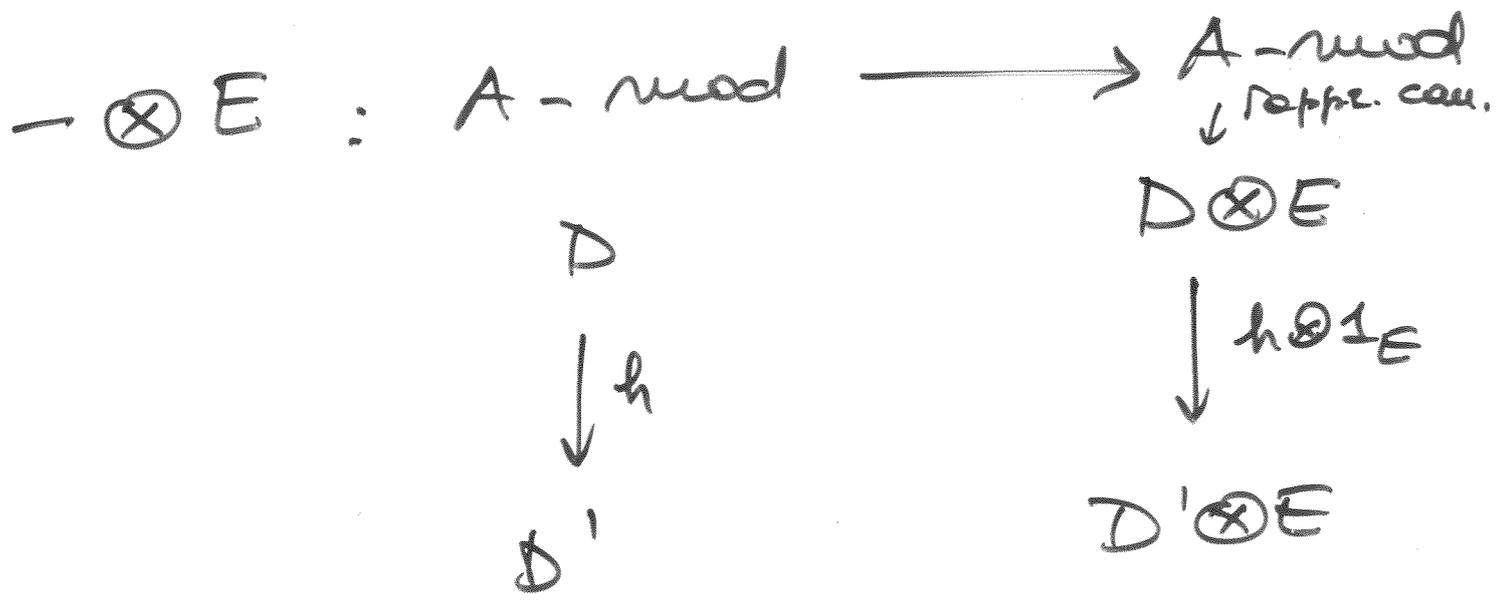
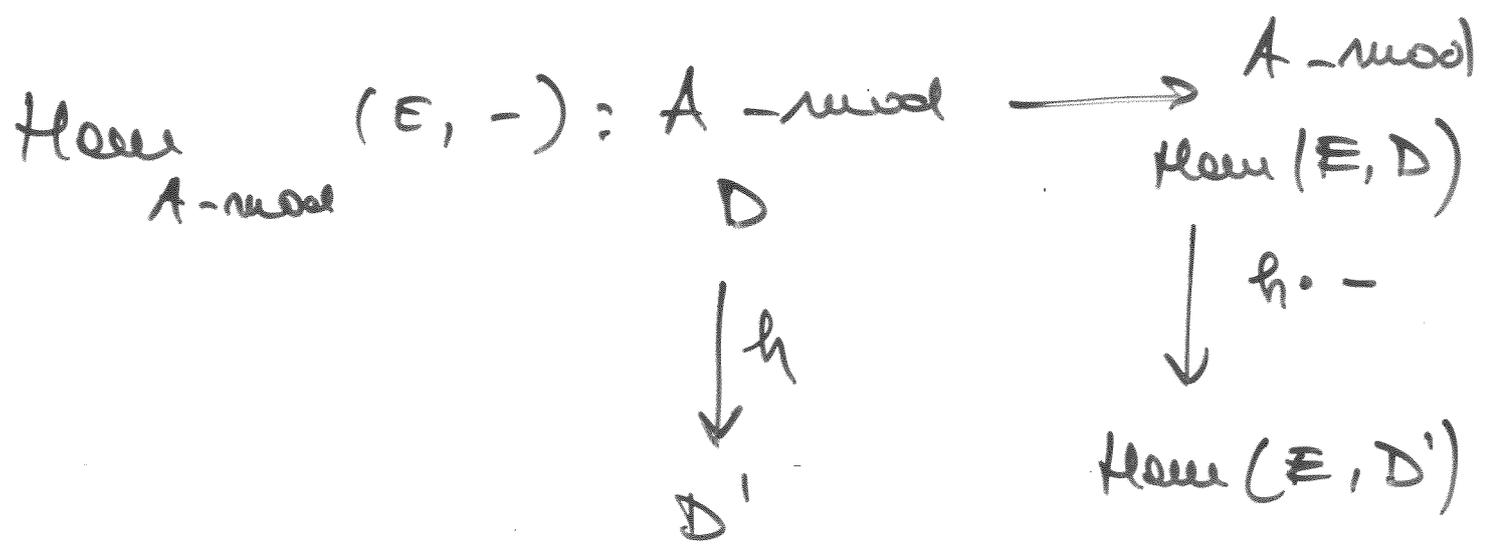
- $\Leftrightarrow f$  è invertibile  $\Leftrightarrow \ker f = 0$

- $\Rightarrow \ker (F(f)) = 0 \Rightarrow F(f)$  è invertibile

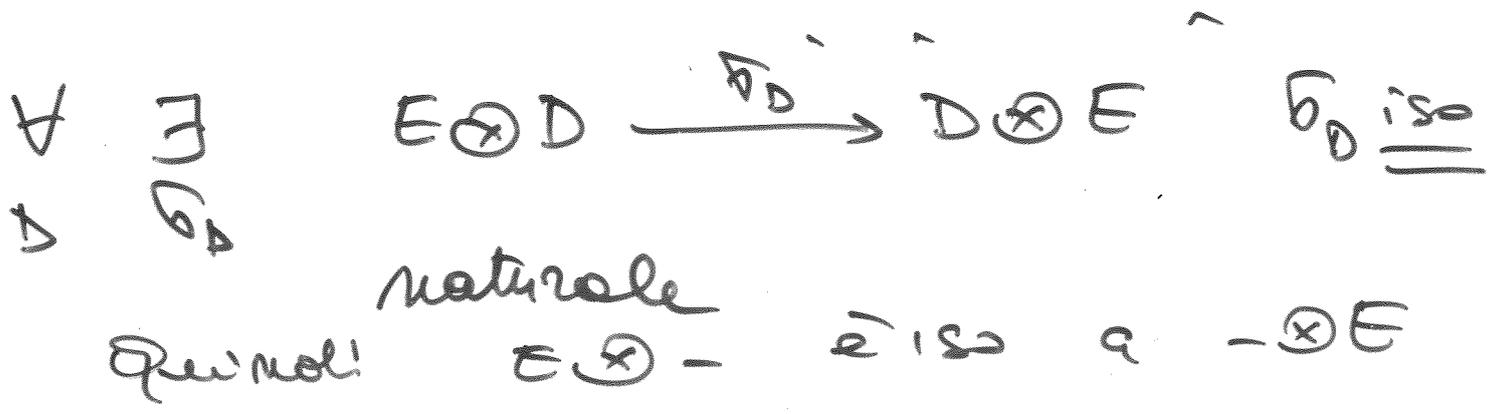
- $f = \ker g \Rightarrow F(f) = \ker F(g)$

- Proposizione duale

Propo  $E \in A\text{-mod}$



oss  $E \otimes - : A\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$   
 $E \otimes D$



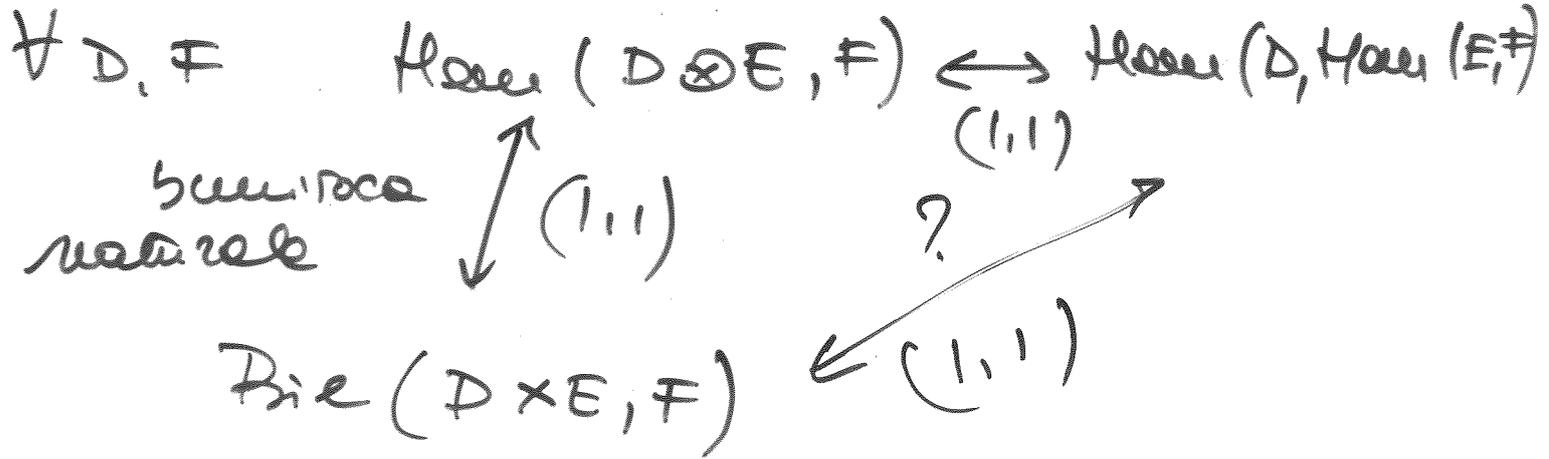
Proposizione

$\forall \mathcal{E} \in A\text{-mod}$

$- \otimes \mathcal{E} \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-mod}}(\mathcal{E}, -)$

DM (TRACCIA)

Dobbiamo trovare una buona naturale



$\hat{(\cdot)} : \text{Bie}(D \times E, F) \longrightarrow \text{Hom}(D, \text{Hom}(E, F))$

$\alpha$   $\hat{\alpha} : \mathbb{F} \rightarrow \text{Hom}(E, F)$

$\hat{\alpha}(d)(e) = \alpha(d, e)$

$\hat{\alpha}(d)$  è lineare perché  $\alpha$  è lin. in  $e$ , quindi  $\hat{\alpha}(d) \in \text{Hom}(E, F)$

$\hat{\alpha}(ad + a'd')(e) = \alpha(ad + a'd', e) =$   
 $= a \alpha(d, e) + a' \alpha(d', e) = [a \hat{\alpha}(d) + a' \hat{\alpha}(d')](e)$

( $\hat{\quad}$ )  $\bar{\quad}$  è bilineare: data  $\beta \in \text{Hom}(D, \text{Hom}(E, F))$

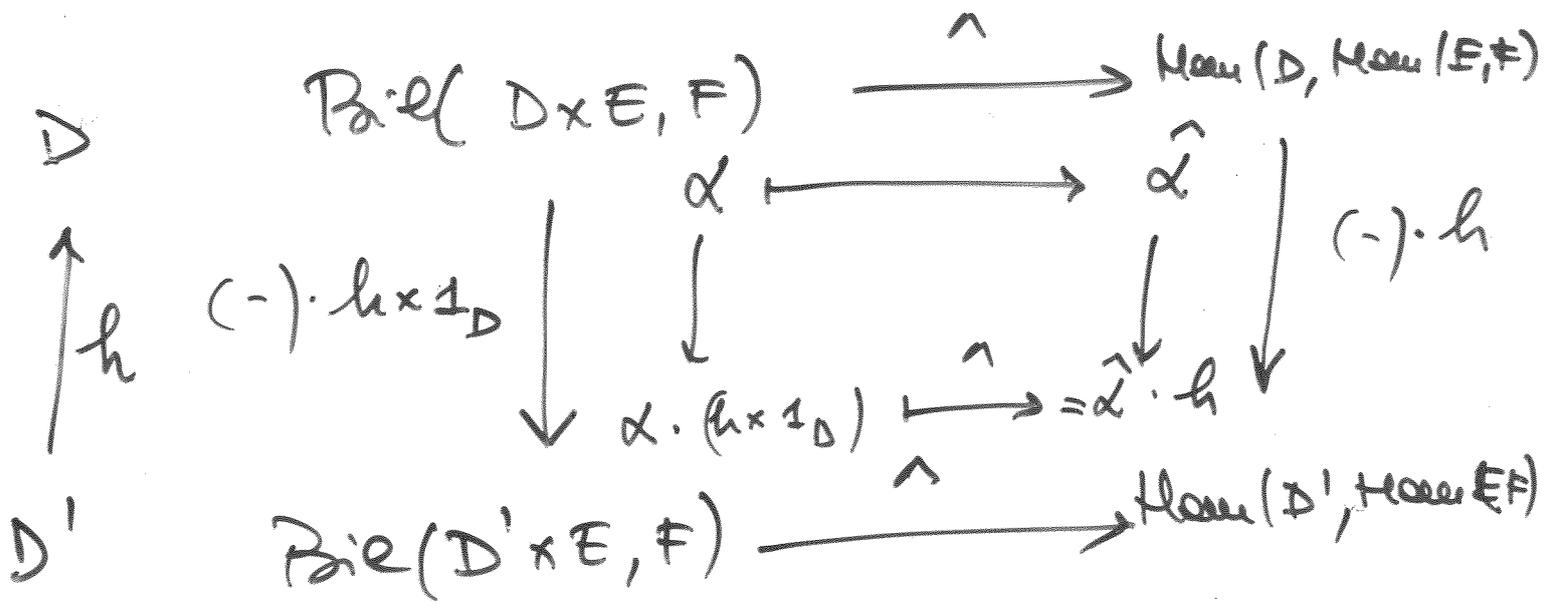
consideriamo  $\check{\beta}: D \times E \rightarrow F$  che  $\bar{\quad}$

$$\check{\beta}(d, e) = \beta(d)(e)$$

bilineare

$$\hat{\check{\beta}} = \beta \quad \& \quad \hat{\hat{\alpha}} = \alpha$$

naturalità in  $D$  e in  $F$  di ( $\hat{\quad}$ ):



provare che conviene

finire la naturalità in  $F$

$$\Rightarrow \mathbb{F} \otimes E \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-mod}}(E, -)$$



$\Rightarrow \text{Hom}_{A\text{-mod}}(E, -)$  preserva i

(6)

limiti, quindi preserva le  
seq esatte corte a sm

(e  $\otimes E$  preserva i limiti, quindi  
preserva le seq esatte corte ads)

### Proposizione

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \text{ esatta a sm}$$

$$\Downarrow$$

$\forall E$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(E, L) \xrightarrow{f_* = f \cdot (-)} \text{Hom}(E, M) \xrightarrow{g_* = g \cdot (-)} \text{Hom}(E, N)$$

esatta a sm

### Dim

$\Rightarrow$  basta applicare  $\text{Hom}(E, -)$   $\forall E$

$\Leftarrow$  )  $f$  è iniettivo; se  $E \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{f} M$

t.c.  $f\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

applico Hom ( $\mathbb{F} -$

]

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{F}, L) \xrightarrow{f_* = f \cdot (-)} \text{Hom}(\mathbb{F}, M)$$

$$\text{for } \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha \mapsto f_*(\alpha) = f\alpha = 0$$

$$f_* \text{ iniettivo} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow f \text{ è iniettivo}$$

$$\bullet \bullet) \quad f \stackrel{i}{=} h \circ g$$

$\begin{matrix} \text{SII} \\ \text{Def} \end{matrix}$

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

TS    i)  $g \circ f = 0$             ii) prop. univ.

i) applico  $\text{Hom}(L, -)$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(L, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(L, N)$$

$\begin{matrix} 1_L & f_*(1_L) = f & g_*(f) = \\ & & g \cdot f \end{matrix}$

$$0 = g_* f_*(1_L) = g \cdot f$$

ii) propr. universale del nucleo (8)

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\
 \uparrow \text{" } \varphi & & \nearrow h & & \\
 H & & & & 
 \end{array}$$

se  $h$  t.c.,  $g \circ h = 0$

appreso  $\ker(H, -)$

$$0 \rightarrow \ker(H, L) \xrightarrow{f_*} \ker(H, M) \xrightarrow{g_*} \ker(H, N)$$

$h$

$g^*(h) = g \cdot h$   
" 0

$\Rightarrow h \in \ker g_* = \ker f_*$

$\exists! \varphi \in \ker(H, L) \quad f_*(\varphi) = h$   
 $f \cdot \varphi$  □

Ex  $\ker(\mathbb{F}, -)$  è additivo ( $\forall \mathbb{F}$ )

$\ker(\mathbb{F}, -)$  è esatto a sin ma  
non è esatto (INGENERATE!)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \ker(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \rightarrow \ker(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} \ker(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$$

" 0

$g_*$   
 $\uparrow$  map  $\neq$   
 è suriettivo

POSSIAMO TROVARE (o caratterizzare) degli  $A$ -moduli  
 E per cui  $\text{Hom}(E, -)$  risulti  
 esatto? SÌ, la risposta è data  
 dagli  $A$ -moduli PROIETTIVI

Teorema Per  $E$   $A$ -modulo  
 sono equivalenti:

①  $\text{Hom}(E, -)$  è esatto

② ogni seq

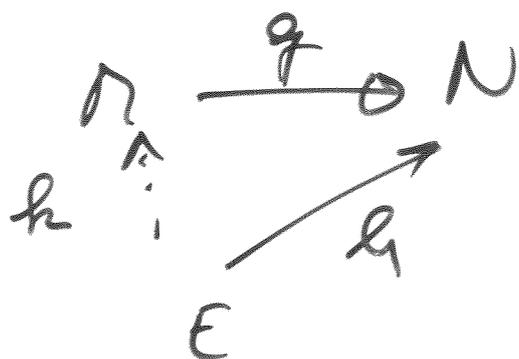


$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow 0$$

è spezzante

③  $\forall g: M \rightarrow N$  suriettiva e

$\forall h: E \rightarrow N$ , esiste un lifting  $k$   
 cioè  $gk = h$



DEF un modulo si dice proiettivo se vale ③ (e quindi ① e ②)



per (2) é surjectiva,  $\exists s: E \rightarrow M'$  (1)

$$g's = 1_E$$

Definimos  $k = h's$

$$gk = g h's = h \underbrace{g's}_{1_E} = h$$

$\Rightarrow k$  é um lifting de  $h$

(3)  $\Rightarrow$  (1) se dá uma seq

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ker}(E, L) \xrightarrow{f_*} \text{Ker}(E, M) \xrightarrow{g_*} \text{Ker}(E, N) \rightarrow 0$$

$f_* = df$  é surjectiva:  $\forall h \in \text{Ker}(E, N)$

$$\exists \tilde{h} \text{ b.c. } g_* (\tilde{h}) = h$$

$\sim$   
 $g \cdot \tilde{h}$

~~esta~~  $\tilde{h}$  se dá unicamente: me

$$\begin{array}{ccc} & g & N \\ & \nearrow & \\ E & \tilde{h} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{é surjectiva} \\ \text{é injetiva} \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists \hat{h}: g\hat{h} = h$$

Oggi: modulo libero  $\bar{e}$

112

problemi

come ( $\times$  ex di tempo fa)

OSS somma diretta di liberi

$\bar{e}$  ancora libero

$M_1$  libero su  $S_1$  e  $M_2$  libero

di  $S_2$

$$M_1 \cong F(S_1) = A^{(S_1)}$$

$$M_2 \cong F(S_2) = A^{(S_2)}$$

$$F \rightarrow U: A\text{-mod} \rightarrow \text{Set}$$

$F$  preserva i colimiti, in particolare i coprodotti

$$F(S_1 \dot{\cup} S_2) = F(S_1) \oplus F(S_2)$$

$$\cong M_1 \oplus M_2 \Rightarrow M_1 \oplus M_2 \text{ \u00e8 libero}$$

Prop  $P$   $\bar{e}$  proiettivo  $\Leftrightarrow P$   $\bar{e}$

addendo diretto di un libero

c'  $\bar{e}$   $\exists F$  libero,  $K$   $A$ -mod t.c.  
 $F = P \oplus K$