B *Statistica (I Parte) - Corso di Laurea in Scienze Naturali - 15 novembre 2006*

NB: i dati relativi agli esercizi seguenti sono inventati

1) La presenza di azoto (valutata in **ppm**) nell'aria di una certa zona è rappresentabile con una variabile aleatoria X con funzione di densità di probabilità data da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0 \\ x & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{per} \quad 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{per} \quad x > 4 \end{cases}$$

i) calcolare la probabilità P_1 che la presenza di azoto sia minore di $\frac{1}{3}$ **ppm** :$P_1 = P(X < \frac{1}{3}) = \int_0^{\frac{1}{3}} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$

e la probabilità P_2 che tale presenza sia maggiore di $\frac{25}{16}$ **ppm** :

$P_2 = P(X < \frac{25}{16}) = \int_{\frac{25}{16}}^{4} \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]_{\frac{25}{16}}^{4} = \frac{3}{8}$

ii) calcolare la presenza di azoto μ attesa nell'aria di tale zona.

$\mu = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \frac{x}{4\sqrt{x}} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{\sqrt{x}}{6}\right]_1^4 = \frac{3}{2}$

2) In un esperimento si miscelano i contenuti di 3 flaconi, presi a caso da un armadietto contenente 3 flaconi di tipo A, 1 di tipo B e 2 di tipo C.

i) Determinare la probabilità p che la miscela ottenuta contenga 2 flaconi di tipo A e 1 di tipo C.

Casi possibili: combinazione $\binom{6}{3} = 20$, Casi favorevoli: terne composte da 1 C ($\binom{2}{1} = 2$ possibilità) e da 2 A ($\binom{3}{2} = 3$ possibilità), quindi $2 \times 3 = 6$ e $p = \frac{3}{10}$

ii) Ripetendo l'esperimento 3 volte, qual è la probabilità q che almeno una volta la miscela ottenuta contenga 2 flaconi di tipo A e 1 di tipo C? $q{=}1-\binom{3}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^3{=}\frac{657}{1000}$.

3) Il valore energetico di un biscotto contenuto in pacchetto venduto da una certa ditta è descrivibile con una variabile aleatoria normale X con media $\mu = 15$ kcal e deviazione standard $\sigma = 3\,$kcal.

i) Quale è la probabilità P_1 che il valore energetico di una caramella presa a caso sia più di 20 kcal?

$P_1 = P(X > 20) = P(Y > \frac{20-15}{3} = \frac{5}{3} \cong 1.67) = 1 - P(Y < 1.67) \cong 1 - 0.9525 = 0.0475$

ii) Quale è la probabilità P_2 che, mangiando 4 biscotti, si assumano meno di 58 kcal?

$P_2 = P(S_4 < 58) \cong P(Y < \frac{58-60}{6} = -\frac{1}{3} \cong -0.33) \cong 1 - P(Y < 0.33) \cong 0.370\,7$

4) In una popolazione l'incidenza del morbo di Fuji è del 6%. Un test medico con sensibilità del 94% e la specificità del 98% viene eseguito su tale popolazione.

i) Calcolare la probabilità P che un soggetto della popolazione con esito positivo al test sia malato.

$P = P(M|Pos) = \frac{0.94 \cdot 0.06}{0.94 \cdot 0.06 + 0.02 \cdot 0.94} = \frac{0.94 \cdot 0.06}{0.94(0.06+0.02)} = \frac{3}{4}$

ii) Sapendo che tale popolazione consta di 20000 soggetti, quanti falsi negativi (malati con esito negativo):

$P(Neg \cap M) \cdot 20000 = P(Neg|M)P(M) \cdot 20000 = 0.06 \cdot 0.06 \cdot 20000 = 72$

e quanti positivi ci si possono attendere?

$P(Pos) = P(Pos|S)P(S) + P(Pos|M)P(M) = (1 - 0.98) \cdot (1 - 0.06) +$
$0.96 \cdot 0.06 = 0.0752$, positivi attesi $= 0.0752 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1504$

Facoltativo: Sapendo che i punti vinti da un giocatore in una partita sono rappresentabili con una v.a. X con la seguente funzione di probabilità:

X	0	1	2	3
p_X	0.1	0.2	0.3	0.4

Usando un'approssimazione normale, calcolare la probabilità P che la media dei punti vinti in 25 partite sia minore di 1.5 :

$\mu = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2,\ E(X^2) = 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4 = 5$
$\sigma^2 = 5 - 4 = 1,\ M_{25} \cong N(2, \frac{1}{25}), P = P(M_{25} < 1.5) \cong P(Y < \frac{1.5-2}{\frac{1}{5}} = -2.5) = 0.0062$

A) Dare la definizione di 80esimo percentile di n dati osservati, calcolandolo per i dati:
$1.3, 0.1, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 3.1, 2.5, -5, -1.2, 8, -6, 11, -\frac{1}{4}$: 80esimo percentile $= 3.1$
B) Enunciare il teorema dellimite centrale.
C) Se X è una v.a. con funzione di distribuzione $F(x) = \frac{1}{5}(x-3)$ su $[3, 8]$, allora
$P(X < 5) = F(5) = \frac{2}{5}, P(X > 4) = 1 - F(4) = \frac{4}{5}, P(4 < X < 7) = F(7) - F(4) = \frac{3}{5}$