Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
16 febbraio 2016
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

PREREQUISITI

Determinare per quali valori del parametro reale a la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 5 + x^{2/3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è iniettiva su tutto $\mathbb{R}$.

$a \in$ ....

1. **(PUNTI 5)** Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z^2) > 0,\, \mathrm{Re}(iz + \sqrt{3}z) < 0 \right\} ,$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \,:\, w = z^2,\ z \in A \right\} ,$$

$$C = \left\{ u \in \mathbb{C} \,:\, u = \frac{1}{z},\ z \in A \right\} .$$

2. **(PUNTI 6)** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \log(e^a + \frac{3}{7})}$$

(a) determinare, al variare del parametro reale a, il dominio (insieme di definizione) D di f;

(b) sia $A = f(D)$ l'immagine di D tramite f. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme A, specificando se si tratta di massimo o di minimo.

3. **(PUNTI 5)** Si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$A_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determinare:

$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n =$

L'insieme dei punti interni di $A =$

$A' =$

$B = \cap_{n=1}^{\infty} A_n =$

4. **(PUNTI 6)** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$f_n(x) = \frac{\sin(x^n) - \sin^n x}{x^{n+2}}.$$

(a) Calcolare il $\lim_{x \to 0} f_n(x)$ per $n = 1, 2, 3$.

(b) Per ogni $n \geq 4$, calcolare il $\lim_{x \to 0} f_n(x)$.

5. **(PUNTI 6)** Determinare al variare del parametro reale α il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha^2 - 2|\alpha|)^n \cdot \frac{\log n}{n}$$

6. **(PUNTI 4)** Sia

$$f(x) = \log(\mathrm{e}^{x^4} - 2x^8)\,.$$

Calcolare $f^{(12)}(0)$.