

Cognome

Nome

Matricola

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica

(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)

14 giugno 2016

(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

PREREQUISITI

Determinare l'insieme A delle soluzioni della disequazione

$$\sqrt{9 - |x + 3|} < 3$$

$A = \dots\dots\dots$

1. **(PUNTI 5)** Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > 5, \operatorname{Im} \left(\frac{i}{z} \right) < 0 \right\},$$

$$B = \{ w \in \mathbb{C} : w = -iz + 2, z \in A \},$$

$$C = \{ t \in \mathbb{C} : t^2 \in A \}.$$

2. (PUNTI 9)

- (a) Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \log(x^{-2}) \cdot \log(\log(x^2))$$

evidenziando: insieme A di definizione di f e limiti di f alla frontiera di A , segno di f , eventuali asintoti, insieme di definizione A' di f' e limiti di f' alla frontiera di A' , segno di f' , eventuali punti estremanti (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

- (b) La funzione è uniformemente continua nel suo insieme di definizione? Giustificare la risposta.

3. **(PUNTI 5)** Calcolare al variare del parametro reale a il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) - 1 + \sqrt[3]{1 + \operatorname{Sh}^2 x}}{x^a}$$

4. **(PUNTI 4)**

(a) Dopo aver provato che $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\forall a, b \geq 0$, dimostrare che

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

definisce una metrica su \mathbb{R} .

(b) Dimostrare che $\rho(x, y) = (x - y)^2$ non è una metrica su \mathbb{R} .

5. **(PUNTI 5)** Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot (1 - \sin \beta)^{\frac{n^2}{n+1}}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

- (a) determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge semplicemente;
- (b) determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge assolutamente.