

Cognome

Nome

Matricola

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica

(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)

5 luglio 2016

(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

PREREQUISITI

L'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x-2|} + |x| < 5\}$$

è un intervallo?

sì

no

è superiormente limitato?

sì

no

è contenuto in un intervallo della forma $(\alpha, +\infty)$ per qualche reale α ?

sì

no

1. **(PUNTI 5)** a) Determinare e disegnare sul piano complesso l'insieme A di tutte le soluzioni dell'equazione

$$(|z|^2 - 1)(z^4|z|i + 4z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- b) Qual è la cardinalità (o potenza) dell'insieme A ?

2. **(PUNTI 4)** Determinare per quali valori del parametro reale a la funzione

$$f(x) = (x - a)e^{\arctan(3x)}$$

è invertibile su tutto \mathbb{R} .

-
3. **(PUNTI 4)** Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ il punto 0 è estremante per la funzione (specificandone il tipo)

$$f(x) = x \cos x - \sin x + x \log(1 + ax^2) + ax^4.$$

4. **(PUNTI 3+2+5)** Verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x^2)}{\sqrt[3]{x-x}}$$

può essere prolungata con continuità su tutto \mathbb{R} ad una funzione g . Stabilire se g è uniformemente continua su \mathbb{R} . Studiare la derivabilità di g .

5. **(PUNTI 5)** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right\}$$

e

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right\}$$

Determinare

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Stabilire, giustificando la risposta, se A e B sono compatti.

6. **(PUNTI 5)** Stabilire per quali valori dei parametri reali a e b la serie converge assolutamente

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^b} \left\{ \frac{1}{1 - \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^2} + 1 - 2 \operatorname{Ch} \frac{1}{n} \right\}.$$