

Cognome

Nome

Matricola

**Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica**

**(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)**

**16 settembre 2016**

*(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)*

**PREREQUISITI**

L'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 5^{-x} - 2x^3 \leq 3\}$$

è un intervallo?

sì

no

è superiormente limitato?

sì

no

è contenuto in un intervallo della forma  $(\alpha, +\infty)$  per qualche reale  $\alpha$ ?

sì

no

1. **(PUNTI 5)** Determinare l'insieme

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : -32 \leq \operatorname{Im} \left( (1 + i\sqrt{3})^n \right) \leq 0 \right\}$$

2. **(PUNTI 5)** Data la funzione

$$f(x) = x \arctan\left(3 + \frac{1}{x}\right)$$

- a) verificare che  $f$  può essere prolungata ad una funzione  $g$  definita e continua in tutto  $\mathbb{R}$ ;
- b) stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la funzione  $g$  è derivabile;
- c) determinare gli eventuali asintoti di  $g$ ;
- d) stabilire se  $g$  è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ .

3. **(PUNTI 5)** Sia

$$f(x) = x - \sqrt{1 + 4x^2}$$

Determinare  $f([0, +\infty))$ .

4. **(PUNTI 4)** Data la funzione  $\rho(x, y) = \log(1 + |x - y|)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

a) dimostrare che  $\rho$  definisce una metrica in  $\mathbb{R}$ . Può essere utile ricordare che

$$\forall a, b \geq 0 \quad 1 + a + b \leq (1 + a)(1 + b)$$

b) Indicato con  $B_\rho(x_0; r)$  l'intorno in  $\mathbb{R}$  di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$  nella metrica  $\rho$ , determinare i valori  $x \in \mathbb{R}$  tali che  $x \in B_\rho(0; 2) \cap B_\rho(4; \log 6)$

5. **(PUNTI 5)** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) \left[ (12x^2 + 6x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 12x + e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right]$$

6. **(PUNTI 6)** Al variare di  $x \in \mathbb{R}$  studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n + n^3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$