Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
Prima prova in itinere 22 novembre 2016 **Versione A**
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

1. **(PUNTI 2+2)** a) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |\log|x-2|-1|.$$

b) Sia

$$A = \{f(x) : 3 < x < 5\}.$$

Allora $\sup A =$ $\inf A =$ Esiste $\max A$? Esiste $\min A$?

2. **(PUNTI 5)** Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4 - (x-2)^2$.
Sia $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica euclidea e siano $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \subset \mathbb{R}^2$ definiti da

$$\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{Q},\ f(x) < y < g(x)\right\},$$

$$\mathrm{B} = \left\{\left(-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, (-1)^n\right) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

e

$$C = A \cup B.$$

Determinare

(a) $\mathrm{C}^o =$ ....

(b) $\mathrm{C}' =$ ....

(c) i punti isolati di C: ....

(d) $\partial\mathrm{C} =$ ....

3. **(PUNTI 2+4)** Dopo aver determinato il valore di

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^5 + (-1)^n \log(1+5n^4)}{8n^3 \arctan n + n^6 \sin\left(\frac{1}{n}\right)},$$

calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n+L}{n-1} + \sin\left(\frac{2}{n-1}\right)\right]^{n^\alpha}.$$

4. **(PUNTI 4)** Determinare quali tra le seguenti serie numeriche sono convergenti, fornendo una breve spiegazione:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2^n+1)}{n^2+n}$ ....

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+3)}$ ....

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{(n+1)2^n}$ ....

5. **(PUNTI 4+2)** Descrivere e disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$E = \{z \in \mathbb{C} : Re(z/\overline{z}) < 0,\ Re(z(\sqrt{3}+i)) < 0,\ Re(z) < 0,\ |z| > 3\},$$

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z,\ z \in E\}.$$

6. **(PUNTI 5)** Stabilire per quali valori del parametro reale x la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - 2e^{2x} + 3e^{x}\right)^{n}$$

e per tali valori determinare la somma della serie.

7. **(PUNTI 4)** Determinare le soluzioni della seguente equazione e disegnarle nel piano complesso

$$(z + i)^4 = (1 - i)^4.$$

Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
Prima prova in itinere 22 novembre 2016 **Versione B**
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

1. **(PUNTI 2+2)** a) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |\log|x+2| - 1|.$$

b) Sia

$$A = \{f(x) : -1 < x < 1\}.$$

Allora $\sup A =$ $\inf A =$ Esiste $\max A$? Esiste $\min A$?

2. **(PUNTI 5)** Siano $f(x) = (x-2)^2 - 4$ e $g(x) = -x^2$.
Sia $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica euclidea e siano $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \subset \mathbb{R}^2$ definiti da

$$\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{Q}, \ f(x) < y < g(x)\right\},$$

$$\mathrm{B} = \left\{\left((-1)^n, \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right) \in \mathbb{R}^2, \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

e

$$C = A \cup B.$$

Determinare

(a) $\mathrm{C}^o =$ ....

(b) $\mathrm{C}' =$ ....

(c) i punti isolati di C: ....

(d) $\partial\mathrm{C} =$ ....

3. **(PUNTI 2+4)** Dopo aver determinato il valore di

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^4 + (-1)^n \log(1+4n^5)}{8n^3 \arctan n + n^5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)},$$

calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n+L}{n+1} + \sin\left(\frac{2}{n+1}\right)\right]^{n^\alpha}.$$

4. **(PUNTI 4)** Determinare quali tra le seguenti serie numeriche sono convergenti, fornendo una breve spiegazione:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n(3^n+1)}$ ....

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n+1}}$ ....

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(3^n+1)}{n^2+5}$ ....

5. **(PUNTI 4+2)** Descrivere e disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$E = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0,\ |z| > 5,\ Re(z/\overline{z}) < 0,\ Re(z(\sqrt{3} + i)) < 0,\ \},$$

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z,\ z \in E\}.$$

6. **(PUNTI 5)** Stabilire per quali valori del parametro reale x la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + 3e^{x} - 5e^{2x}\right)^{n}$$

e per tali valori determinare la somma della serie.

7. **(PUNTI 4)** Determinare le soluzioni della seguente equazione e disegnarle nel piano complesso

$$(z - i)^4 = (1 + i)^4.$$