Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
9 febbraio 2017
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

PREREQUISITI

Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è iniettiva su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log|x-3| & \text{se } x < 2 \\ -2x + a & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

1. **(PUNTI 5)** Determinare, in forma trigonometrica o esponenziale, e disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^4) > 0,\ \mathrm{Re}(i\bar{z} - z) > 0,\ |z| > 4\},$$

$$F = \{u \in \mathbb{C} : u = \frac{1}{z},\ z \in E\}.$$

2. **(PUNTI 5)** Data la funzione $f(x) = e^{-\arctan x^3} + e^{-x^3}$

   a) dimostrare che f è invertibile su tutto $\mathbb{R}$;

   b) determinare l'insieme di definizione di $g = f^{-1}$;

   c) determinare la retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $e^{\frac{\pi}{4}} + e$;

   d) determinare l'insieme dei punti in cui g è derivabile.

3. **(PUNTI 5)** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$x_n = n^{3/2}\left(e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{1+\sin^2\frac{1}{n}}\right)\left(a - 2\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

   Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la successione $\{x_n\}$ è regolare.

4. **(PUNTI 7)** a) Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x|+1}{2-x}\right)$$

evidenziando insieme di definizione A di f, limiti agli estremi di A, segno di f, segno di f', eventuali punti estremanti, natura degli eventuali punti di A in cui f non è derivabile, segno di f'', eventuali punti di flesso.

b) Tracciare un grafico qualitativo di $h(x) = \sup\{f(t),\ t < x,\ x \in A\}$.

5. **(PUNTI 6)** Stabilire al variare del parametro reale a il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^a + \frac{\sqrt{n}}{\log^2 n} \right) \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \right\}.$$

6. **(PUNTI 4)** Dato lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ dove d è la metrica discreta definita da

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y, \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando brevemente la risposta.

a) L'insieme $[0,1]$ è compatto.

b) La successione $x_n = \frac{1}{n}$ è convergente.

c) L'insieme $[0,+\infty)$ è illimitato.

d) L'insieme $[0,1]$ è aperto.