

Cognome

Nome

Matricola

**Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica**

**(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)**

**20 giugno 2017**

*(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)*

**PREREQUISITI**

Determinare le soluzioni della seguente disequazione (scrivere solo la risposta)

$$\sqrt{\frac{9-x}{x+1}} > -x^2$$

1. **(PUNTI 5)** Si consideri la seguente equazione nel campo complesso  $z^3 = \alpha \bar{z}^3$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Allora (vero o falso?)

- (a) l'equazione ammette soltanto la soluzione banale  $z = 0$  .....
- (b) l'equazione ammette soluzioni non banali solo per  $\alpha$  tale che  $|\alpha| = 1$  .....
- (c) l'equazione ammette per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  soluzioni non banali .....

Determinare (se possibile) le soluzioni e disegnarle nel piano complesso nel caso  $\alpha = -1$ .

2. (PUNTI 4) Sia

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}} + \sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1}.$$

Stabilire se il diagramma di  $f$  ammette asintoto obliquo per  $x \rightarrow -\infty$  e in caso affermativo determinarlo.

3. (PUNTI 5) Calcolare al variare del parametro  $\alpha \geq 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh \sqrt{x} - \sqrt{x+1} + x^2}{\sin(x^\alpha) + x^2}.$$

4. **(PUNTI 4)** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  (dotato della metrica euclidea):

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{n} - 2, 1 - \frac{1}{n^2} \right]; \quad F = \left\{ \frac{5(n+1) \cos \pi n}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad A = E \cup F$$

Allora

$$E = \dots\dots\dots$$

$$A^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\overline{A} = \dots\dots\dots$$

$$\partial A = \dots\dots\dots$$

5. **(PUNTI 5)**

Determinare per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{a(a-2)n} \log \left( 1 + n^{a-\frac{5}{2}} \right)$$

6. **(PUNTI 3)** Sia  $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  quattro volte derivabile in  $x = 0$  e tale che

$$f(x) = 1 + 3x + 2x^2 + x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Posto  $g(x) = f(x) \log(1 - x)$ , calcolare  $g^{(4)}(0)$ .

7. **(PUNTI 4)** Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x^2 \log x - x^2 - \frac{3}{2} \log^2 x.$$

- a) Determinare  $A$ , l'insieme di definizione di  $f$ ;
- b)  $f$  è iniettiva in  $A$ ?
- c)  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è suriettiva? In caso negativo determinare  $f(A)$ .

**Motivare le risposte.**