Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
06 luglio 2017
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

PREREQUISITI

Date le funzioni

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \begin{cases} \pi & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

disegnare i grafici di entrambe le seguenti funzioni:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x)).$$

1. **(PUNTI 4)** Al variare del parametro reale α, studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(e^{\sqrt[3]{n}} + n\right)\left(\mathrm{Sh}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

2. **(PUNTI 3)** Sia $\{a_n\}$ una successione reale **limitata**. Definiamo

$$x_n = \sup_{k \geq n} a_k$$

1) Dimostrare che la successione $\{x_n\}$ è limitata.
2) Dimostrare che la successione $\{x_n\}$ è convergente.
3) Dimostrare che se $\{a_n\}$ converge ad a allora anche $\{x_n\}$ converge ad a.

3. **(PUNTI 6)** Determinare e disegnare i seguenti insiemi nel campo complesso.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \; : \; \mathrm{Im}(iz^2) > 0 \, , \, \mathrm{Re}\big((1 + i\sqrt{3})z\big) > 0 \, , \, |z| < 2\}$$

$$B = \big\{w \in \mathbb{C} \; : \; w = z^2 \, , \, z \in A\big\} \qquad \text{e} \qquad C = \left\{u \in \mathbb{C} \; : \; u = \frac{1}{\bar{z}} \, , \, z \in A\right\}.$$

4. **(PUNTI 4)** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1+\log n} - \sqrt{\log n}\right).$$

5. **(PUNTI 5)** Stabilire per quali valori dei parametri $a,\ b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)^2-\sin(x^2+x^3)}{x^3} & \text{se } x > 0 \\ bx + a & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta:

a) continua su tutto $\mathbb{R}$;

b) derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

6. **(PUNTI 8)** Sia
$$f(x) = |x|e^{\frac{|x|+3}{|x|-1}}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione di f, i limiti agli estremi ed eventuali asintoti, f' e il suo insieme di definizione, eventuali punti di non derivabilità, eventuali punti estremanti e tracciarne un grafico qualitativo.

(b) Stabilire se f è uniformemente continua su $(0, 1)$ e su $(1, +\infty)$.