

Cognome

Nome

Matricola

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
12 Settembre 2017

(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

PREREQUISITI

Tracciare un grafico qualitativo della funzione:

$$f(x) = |\log(1 - x)| - 1$$

evidenziando le sue intersezioni con gli assi cartesiani.

1. **(PUNTI 4)** Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^2|z|^2 = 3i\bar{z}$$

e scrivere le soluzioni in forma algebrica.

2. **(PUNTI 3)** Si consideri la funzione

$$f(x) = 3x - \log(1 + 4x^2) + 3.$$

i) Dimostrare che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e suriettiva.

ii) Detta g la sua inversa determinare lo sviluppo di Taylor di $g(y)$ arrestato al primo ordine, con resto di Peano, centrato in $y_0 = 3$.

3. **(PUNTI 3)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = (x + 1) \arctan(x + 1) - x \arctan x - 2x.$$

Stabilire se il diagramma di f ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e in caso affermativo determinarlo.

4. **(PUNTI 5)** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 (dotato della metrica euclidea):

$$E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 2 + \frac{1}{n}, 0 \leq y < x + \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \dots\dots\dots$$

$$F^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\partial(E_1 \cap \mathbb{Q}^2) = \dots\dots\dots$$

5. **(PUNTI 6)** Data la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = e^{x^2}(x^4 + a), \quad a \in \mathbb{R},$$

calcolare

$$g(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} f_a(x).$$

6. (PUNTI 5) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^a \arctan n$$

- (i) determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la serie converge **assolutamente**;
- (ii) determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la serie converge **semplicemente**.

7. (PUNTI 4) Calcolare al variare del parametro reale α il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(e^{1 - \frac{1}{2n}} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$