

Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica (proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta del 19.04.2011

COGNOME:..... NOME:

N. MATRICOLA:..... Corso di Laurea:

1] (3 punti) Stabilire, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale α risulta iniettiva la successione $\{\alpha n - [\alpha n]\}_{n=1}^{\infty}$ (dove $[t]$ denota la parte intera di t).

2] (4 punti) Determinare, in forma trigonometrica, tutte le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^4(\sqrt{3} + i)^2 = 1 + 2z\bar{z}.$$

Breve giustificazione.

3] (5 punti) Sia A l'insieme degli zeri della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{\sin(1/x)}$.

Determinare A e A' (rispetto alla metrica euclidea).

$A = \dots\dots\dots$

$A' = \dots\dots\dots$

4] (4 punti) Determinare classe limite della successione

$$a_n = \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n + \frac{\log n}{\log(2n)} + \sin \frac{n\pi}{4} \quad n = 1, 2, \dots$$

Classe limite:.....

5] (5 punti) Al variare del parametro reale $x \neq 4/3$, discutere il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \log n}{n^x (3x - 4)^n}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

6] (3 punti) Determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Breve giustificazione.

7] (5 punti) Al variare dei parametri reali strettamente positivi a, b si consideri la funzione reale di variabile reale

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt[3]{1+2x}} - e}{x} & \text{se } x < 0 \\ b[\log(\operatorname{Ch} x)]^a \log(\operatorname{Ch}(1/x)) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Stabilire per quali coppie (a, b) la funzione $f_{a,b}$ è prolungabile con continuità nell'origine.

Scrivere uno svolgimento completo.

8] (5 punti) Siano $\{a_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{\beta_n\}$ quattro successioni tali che $\{a_n\}$ sia asintotica a $\{\alpha_n\}$ e $\{b_n\}$ sia asintotica a $\{\beta_n\}$. Mostrare che non è detto che $\{a_n + b_n\}$ sia asintotica a $\{\alpha_n + \beta_n\}$, ma questo è certamente il caso se $\text{sgn}(a_n) = \text{sgn}(b_n)$ per ogni n .

Scrivere uno svolgimento completo.