Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica (proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta/Seconda prova parziale (solo esercizi 4–8) del 15.2.2011

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:.................... Corso di Laurea: ....

1] *(2+3 punti)* Al variare dei parametri reali α e β si consideri la funzione

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\log\Big(\big|2-|x-\alpha|\big| - 2x + \beta\Big)}{x+\alpha}.$$

1) Determinare il dominio di $f_{2,1}$.

2) Stabilire per quali coppie (α, β) la funzione $f_{\alpha,\beta}$ è definita almeno nell'intervallo $(-\infty, 1)$.

1) ....

2) ....

2] *(4 punti)* Rappresentare l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \;\; : \;\; \mathrm{Re}\,(1/z^2)\,\mathrm{Im}\,(1/z^2) = 0 \;\; , \;\; |z| = \sqrt{2}\}.$$

Individuare tutti gli $\alpha \in \mathbb{C}$ tali che $A \supseteq \{z \in \mathbb{C} \;\; : \;\; z^4 = \alpha\}$.

I valori di α sono:...............

3] *(4 punti)* Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di X. Mostrare che si ha $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ e che l'inclusione può essere stretta.

4] *(4/6 punti)* Determinare l'equazione dell'eventuale asintoto per $x \to -\infty$ al grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 4x} + \frac{4x + 3 + \sin^2 x}{3x - 1}.$$

Equazione dell'asintoto: ....

5] *(5/7 punti)* Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[n]{n} \right)^{1/\log n}.$$

Scrivere svolgimento

6] *(3/5 punti)* Stabilire il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - 2\cos n\Big)\Big[\exp\Big(\frac{1}{n^2+n}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{n+2}\Big)\Big].$$

Breve giustificazione:

7] *(5/8 punti)* Al variare del parametro reale POSITIVO a, si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^{2a})}{x^{4a} + \arctan x}, \qquad x > 0.$$

a) Stabilire per quali valori di a la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$.

b) Stabilire per quali valori di a la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ è convergente.

Scrivere svolgimento.

8] *(5/8 punti)* SIa (X, d) uno spazio metrico e S un sottoinsieme non vuoto di X. Per ogni $x \in X$ si definisca

$$\Delta_S(x) = \inf\{d(x, s) \quad : \quad s \in S\}.$$

Mostrare che la funzione $\Delta_S : X \to \mathbb{R}$ è 1–lipschitziana, ovvero che per ogni $x, y \in X$ si ha

$$|\Delta_S(x) - \Delta_S(y)| \leq d(x, y).$$