

Analisi Matematica 1
Corso di Laurea in Matematica (proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta del 20.6.2011

COGNOME:..... NOME:

N. MATRICOLA:..... Corso di Laurea:

1] (4 punti) Le soluzioni della seguente disequazione sono:

$$\sqrt{2(x-1)(x+2)} > \frac{x}{|x|}(2x-3)$$

.....

2] (6 punti) Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2}|z+1| < |z+i|, \operatorname{Im}z > 1\};$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : w = z + 2 - i, z \in A\};$$

$$C = \{u \in \mathbb{C} : u = \frac{i}{w}, w \in B\}.$$

3] (4 punti) Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.

A) "Se una successione di numeri reali ammette limite (in $[-\infty; +\infty]$), allora ammette massimo o minimo."

B) "Se una successione limitata di numeri reali converge al suo estremo superiore, allora è definitivamente crescente."

4] (5 punti) Determinare, al variare del parametro reale a , il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \frac{\sqrt{n \log^3 n + 1} - \sqrt{n \log^3 n}}{e^{1/3n} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)}.$$

Scrivere svolgimento

5] (6 punti) Calcolare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x^\alpha + 2x^4) - \log(3x^4 + x^2)}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)}.$$

Scrivere svolgimento

6] (3 punti) Determinare il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n}.$$

Si ricorda che $[t]$ denota la parte intera di t .

Scrivere svolgimento

7] (4 punti) Sia X un insieme e siano d_1 e d_2 due metriche su X tali che lo spazio metrico $(X; d_1)$ sia compatto e $(X; d_2)$ non sia compatto. Mostrare che esistono qualche punto $x \in X$ e qualche numero positivo r tali che il disco di centro x e raggio r nella metrica d_2 non contenga alcun disco di centro x (e raggio positivo) nella metrica d_1 .