

Analisi Matematica 1
Corso di Laurea in Matematica (proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta del 11.7.2011

COGNOME:..... NOME:

N. MATRICOLA:..... Corso di Laurea:

1] (3 punti) Stabilire se l'applicazione $T : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$T(x, y) = \pi x + y$$

a) è iniettiva; b) è suriettiva.

Breve spiegazione.

2] (5 punti) Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^4) < 0, \operatorname{Re}(iz - z) < 0, |z| > 3\};$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z, z \in A\};$$

$$C = \{u \in \mathbb{C} : u = \frac{1}{w}, w \in B\}.$$

3] (5 punti) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x) = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.

- a) f è continua in $x = 0$.
- b) f è strettamente positiva in qualche intorno di $x = 0$, eccetto al più nel punto $x = 0$.
- c) f potrebbe essere discontinua in ogni punto di \mathbb{R} .

4] (6 punti) Determinare, al variare del parametro reale x , i caratteri semplice e assoluto della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan\left((2n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{n} \left(\frac{\sqrt{2-x}}{x}\right)^n.$$

Scrivere svolgimento

5] (5 punti) Stabilire se è possibile prolungare in modo continuo a tutto $[0, +\infty)$ la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\log^3\left(\frac{x}{4}\right)} \left(1 - \cos \sqrt[3]{\log x - \log 4}\right)^3.$$

Scrivere svolgimento

6] (4 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$a_n = \sin \frac{n!\pi}{4} + \frac{3n - 1}{n}.$$

Allora

$$\sup\{a_n\}_1^\infty = \dots\dots; \quad \inf\{a_n\}_1^\infty = \dots\dots; \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \dots\dots; \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \dots\dots$$

7] (5 punti) Sia X un insieme e siano d_1 e d_2 due metriche su X . Per ogni $x, y \in X$ si ponga

$$\Delta(x, y) = \max \{d_1(x, y), d_2(x, y)\};$$

$$\delta(x, y) = \min \{d_1(x, y), d_2(x, y)\}.$$

Stabilire se (X, Δ) è uno spazio metrico e se (X, δ) è uno spazio metrico.