Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica (proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta del 9.9.2011

COGNOME. . . . . NOME: . . . .

N. MATRICOLA:. . . . . Corso di Laurea: . . . .

1] *(2+2 punti)* Al variare del parametro reale α, sia D_α l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$2x^2 - \alpha x < x^3.$$

a) Dimostrare, senza risolvere la disequazione, che per ogni valore di α l'insieme D_α non è vuoto.

Breve spiegazione.

b) Risolvere per ogni valore di α la disequazione.

$D_\alpha = \dots\dots\dots$

2] *(4 punti)* Sia $w = 1 + i\sqrt{3}$. Scrivere in forma algebrica tutte le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(z-3)\right)^4 = w^2.$$

Soluzioni . . . .

3] *(4 punti)* Sia E un sottoinsieme compatto dell'asse reale dotato della metrica euclidea. È possibile che il derivato di E sia un insieme infinito numerabile?

Motivare la risposta

4] *(6 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale a, si ha convergenza semplice della seguente serie. Specificare inoltre per quali valori di a la convergenza della serie è assoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n + a^n}{5^n} \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right).$$

Scrivere svolgimento

5] *(6 punti)* Determinare le equazioni degli eventuali asintoti al diagramma della funzione

$$f(x) = (x-2)^2 \log\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) + \frac{2x^2+5x}{x-1}.$$

Equazioni degli asintoti

6] *(4 punti)* Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt[5]{n^5-3n}-n\right)}{\arctan\left(\frac{n^2+3}{2n+1}\right)-\frac{\pi}{2}}.$$

Scrivere svolgimento

7] *(2+3 punti)* Sia $\{a_n\}$ una successione limitata a valori reali.
Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.

a) Se la classe limite di $\{a_n\}$ ha cardinalità finita, allora esiste $\{b_n\}$ periodica tale che per ogni $\varepsilon > 0$ definitivamente si abbia $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

b) Se esiste $\{b_n\}$ periodica tale che per ogni $\varepsilon > 0$ definitivamente si abbia $|a_n - b_n| < \varepsilon$, allora la classe limite di $\{a_n\}$ ha cardinalità finita.