

Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M.Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta d'esame del 08.02.2010

COGNOME:..... NOME:

N. MATRICOLA:..... Corso di Laurea:

1] (4 punti) Al variare del parametro reale α , determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3n^\alpha} - \sqrt{n}}{n^{2\alpha-2}}$.
(Riportare la risposta senza lo svolgimento)

2] (5 punti) Rappresentare nel piano complesso l'immagine di ciascuno dei seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - i| = |z^2 + 1|\},$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : w = e^{i\frac{\pi}{8}}z, z \in A\}.$$

3] (4 punti) Siano f e g due funzioni strettamente positive e diverse da 1 su qualche intorno di $+\infty$ e si abbia $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$. Stabilire sotto quale condizione vale la relazione $\log f(x) \sim \log g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ motivando la risposta fornita.

4] (5 punti) Calcolare, scrivendo uno svolgimento completo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2 - x^4) - \log(1 + \sin(\frac{5\pi}{2} + 3x^2))}{(1 - \sqrt[3]{\cosh x})^2}$.

5] (4 punti) Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali. Individuare una metrica su \mathbb{N} che lo renda compatto. Stabilire quindi, motivando la risposta fornita, se esistono funzioni da \mathbb{N} in \mathbb{N} strettamente monotone rispetto all'ordinamento usuale di \mathbb{N} , che siano continue rispetto alla metrica individuata.

6] (6 punti) Al variare del parametro reale x , discutere il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x^2 - 2|x|)^n \frac{\log^2 n}{n}.$$

7] (9 punti) Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali (positivi). Per $n \in \mathbb{N}$ si ponga

$$S_n = \left\{ \frac{h}{n} - \operatorname{artg} \frac{k}{n} : h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Siano quindi $A = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ e $B = \cap_{n=1}^{\infty} S_n$. Determinare gli estremi inferiore e superiore di A e di B e individuare gli insiemi A' e B' , derivati rispettivamente di A e di B (rispetto alla metrica euclidea di \mathbb{R}). Rispondere infine al quesito analogo formulato sostituendo a S_n , per ogni n , l'insieme

$$T_n = \left\{ \frac{h}{n} - \operatorname{artg} \frac{k}{n} : h, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Motivare brevemente tutte le risposte fornite.