

Cognome

Nome

Matricola

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. M. Calanchi, C. Cavaterra, F. Messina, E. Terraneo)
prova scritta 5 maggio 2014 - 9 CREDITI
Versione A

1. **(PUNTI 5)** Calcolare, al variare del parametro reale α , il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\{\log(2x^2 + 2x + 1) - x - \sin x\}}{\arctan(x^\alpha) + x^4}$$

(scrivere uno svolgimento completo)

-
2. **(PUNTI 4)** Si considerino in \mathbb{R}^2 dotato della metrica euclidea i seguenti sottoinsiemi
 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2, y \in \mathbb{Q}\}$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3 + \frac{1}{n}, y = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
e sia $C = E \cup F$.

Determinare:

- (a) $C^o = \dots\dots\dots$
- (b) $C' = \dots\dots\dots$
- (c) $\bar{C} = \dots\dots\dots$
- (d) $\partial C = \dots\dots\dots$

3. (PUNTI 8) Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = |x| + 4 \arctan \frac{1}{1 + e^x}$$

Determinare

- (a) l'insieme di definizione A
- (b) i limiti agli estremi dell'insieme di definizione A
-
- (c) eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui)
.....
- (d) f' e il suo insieme di definizione A'
.....
.....
- (e) i limiti di f' agli estremi di A'
.....
.....
- (f) eventuali punti estremanti
.....
- (g) f'' ed eventuali punti di flesso
.....
- (h) tracciarne un grafico qualitativo

4. **(PUNTI 5)** Sia a_n una successione tale che per $n \rightarrow +\infty$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Stabilire (al variare del parametro α , il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{|\alpha|-3} \left[e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \log(1 + a_n) \right]$$

(scrivere solo la risposta)

.....

-
5. **(PUNTI 5)** Sia

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) (\log x)^{-1} & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ a & x = 1 \end{cases}$$

Determinare a in modo che f sia continua in $x = 1$. Stabilire se f è derivabile in $x = 1$ e in caso affermativo calcolare $f'(1)$.

(scrivere uno svolgimento completo)

6. (PUNTI 5) Rappresentare graficamente i seguenti insiemi:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im}(z^3) > 0\}$$

e

$$B = \{w \in \mathbb{C} : w = \frac{i}{z}, z \in A\}.$$

Questo esercizio verrà valutato *solo* se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(BONUS) Studiare al variare di α il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan(n+1)^\alpha - \arctan n^\alpha)$$

AIUTO: Per i valori di α per i quali la serie converge, calcolare la somma della serie.