Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Peloso)
Prova scritta 11 febbraio 2015 – 9 CREDITI
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

1. **(PUNTI 4)** Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dove $f(x) = x^x$.

   a) Dimostrare è possibile prolungare con continuità f in $x = 0$.

   b) Chiamato $\tilde{f}$ tale prolungamento, stabilire se $\tilde{f}$ è derivabile in $x = 0$ (ovvero se esiste la derivata destra di $\tilde{f}$ in $x = 0$).

   c) Stabilire se $\tilde{f}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty)$

2. a) **(PUNTI 8)** Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$$

specificando: dominio di f, limiti di f agli estremi del dominio, eventuali asintoti, dominio di f' e limiti di f' agli estremi del dominio, monotonia e punti estremanti.

b) **(PUNTI 2)** Determinare l'insieme di definizione e tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$g(x) = \inf\{f(t),\ t \geq x\}$$

3. **(PUNTI 4)** Si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$B_1 = [-1, 0) \cap \mathbb{Q}, \quad B_2 = \left\{ b_n = 1 + \frac{2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

e

$$A = B_1 \cup B_2 \cup (4, 5].$$

Determinare

(a) $\mathrm{A}^\circ =$ ....

(b) $\mathrm{A}' =$ ....

(c) i punti isolati di A. ....

(d) $\partial \mathrm{A} =$ ....

4. **(PUNTI 5)** Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2 \sin(\log(2 - x)) + 2(x - 1)\mathrm{e}^{x-1} - (x - 1)^2}{\arctan[(x - 1)^{2-\alpha}]}.$$

5. **(PUNTI 5)** Al variare del parametro reale x, studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+nx^n}{2^n+\sqrt{n}}$$

6. **(PUNTI 4)** Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$E = \{z \in \mathbb{C} \, : \, Im z^2 < 0, \, |z| > 5, \;\; Re(i\bar{z} + z) > 0\}.$$

$$F = \{w \in \mathbb{C} \, : \, w = \frac{1}{z}, \;\; z \in E\}$$

$$G = \{u \in \mathbb{C} \, : \, u = z^2, \;\; z \in E\}.$$