

## Analisi Matematica 1- Corso di Laurea in Matematica

Argomenti ed esercizi dati per noti

1. Geometria analitica nel piano: piano cartesiano, rette, coniche “standard”: circonferenza, parabola, ellisse ed iperbole.
2. Funzioni: nomenclatura di base, composizione, funzione inversa.
3. Equazioni e disequazioni: primo e secondo grado, fratte, sistemi. Soluzione analitica e interpretazione geometrica.
4. Funzioni potenze, esponenziali e logaritmi: definizione, proprietà e grafici. Disequazioni.
5. Trigonometria: misure in radianti, funzioni trigonometriche: definizione, proprietà, grafici. Equazioni e disequazioni.
6. Equazioni e disequazioni varie con radici, moduli, esponenziali e logaritmi.
7. Grafici di funzioni e composizione con traslazioni, dilatazioni e moduli.

### Esercizi

(Un (\*) indica quelli un po' più difficili e che saranno anche discussi al tutorato.)

(a)  $x^3 + 8 < 0$ ;

(b)  $\sqrt{x+8} < 12 - x$

(c)  $\sqrt{x+1} \leq 5 - \sqrt{x+6}$

(d)  $\frac{\sqrt{x - \sqrt{1-x}}}{1 - \sqrt{x}} < 1$

(e)  $2^{x+1} > 4 \cdot 2^{-\sqrt{2|x|}}$

(f)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-\sqrt{4-x^2})} \geq 1$

(g)  $\cos x + \sin x \leq 0, \quad x \in [0, 2\pi)$

(h)(\*)  $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{x-a}{x}} < 1, \quad \text{al variare del parametro } a \in \mathbb{R}$

$$(i) \frac{3|x|}{\sqrt{x+2}+x} \geq 1;$$

$$(l) \sqrt{|x-1|} + |x| < 3;$$

$$(m)(*) x - 1 + (3x - 1) \log x \geq 0;$$

$$(n) \sqrt{9 - |x+3|} < 3;$$

8. Sia

$$f(x) = \begin{cases} -|x+5| & \text{se } x < -1 \\ x-1 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{1+x} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Determinare il più ampio intervallo che contiene zero dove  $f$  è iniettiva.

9. Disegnare l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, x^2 + y^2 < 3\}.$$

10. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  siano

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 - \frac{1}{n} < x < 3 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} < y < 2 - \frac{1}{2n}\}.$$

Determinare  $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$  e  $C = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ .

11. Siano date le funzioni  $f(x) = \sqrt[9]{x-1}$  e  $g(x) = |x|^3 + 1$ . Rappresentare graficamente le funzioni  $F(x) = f(g(x))$  e  $G(x) = g(f(x))$ .

12. (\*) Determinare tutti e soli i valori del parametro reale  $k$  per i quali la disequazione

$$2\sqrt{x} + \sqrt{4-x} < \sqrt{3x+2k}$$

è soddisfatta per ogni  $x \in [0, 4]$ .

13. Rappresentare graficamente le funzioni:

$$f(x) = 2^x - 2 \qquad g(x) = |f(x-2)| - 1.$$

14. Siano

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -4 \\ 3+x & \text{se } -4 < x \leq 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -2x-8 & \text{se } x < -3 \\ -2 & \text{se } x \geq -3 \end{cases}.$$

Tracciare i diagrammi delle funzioni  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  e  $h(x) = |f(|x|)|$ .

15. L'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 5^{-x} - 2x^3 \leq 3\}$$

è un intervallo?  sì  no

è superiormente limitato?  sì  no

è contenuto in un intervallo della forma  $(\alpha, +\infty)$  per qualche reale  $\alpha$ ?  sì  no

16. L'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x-2|} + |x| < 5\}$$

è un intervallo?  sì  no

è superiormente limitato?  sì  no

è contenuto in un intervallo della forma  $(\alpha, +\infty)$  per qualche reale  $\alpha$ ?  sì  no

17. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x - 3 \sin x + 2}}$$

esprimendolo come intervallo o unione di intervalli

18. Determinare per quali valori del parametro reale  $a$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 5 + x^{2/3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è iniettiva su tutto  $\mathbb{R}$ .

19. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x - 6}.$$