PROGRAMMA DEFINITIVO DI ANALISI MATEMATICA 1
A.A.2016/17

Rappresentazione decimale dei numeri razionali. Numeri reali e ordinamento. Non esistenza di un numero razionale il cui quadrato è uguale a 2 (*).
Teorema di densità (*) di **Q** e **R\Q** in **R**.

Sottoinsiemi limitati e illimitati di **R.** Maggioranti, minoranti, estremo superiore ed inferiore e loro proprietà (*). Massimo e minimo di un insieme. Intervalli.
Teorema di completezza (*).

Operazioni tra numeri reali. **R** è un campo ordinato**.** **R** è un campo archimedeo. Radice ennesima di un numero reale non negativo. Logaritmo di un numero reale non negativo.

Il campo complesso **C**. Operazioni di somma e prodotto, elementi neutri, opposto e reciproco. **R** è isomorfo a un sottocampo di **C**. Forma algebrica dei numeri complessi. Forma trigonometrica dei numeri complessi. Coniugato e modulo di un numero complesso e loro proprietà (*), operazioni in forma trigonometrica (*). Forma esponenziale dei numeri complessi. Proprietà dell'esponenziale complessa (*). Formula di De Moivre (*). **C** è campo non ordinato. Radici n-esime di un numero complesso (*). Teorema fondamentale dell'algebra e corollario per polinomi a coefficienti reali.

Potenza o cardinalità di un insieme. Insiemi equipotenti. Potenza del numerabile. Insiemi numerabili. Numerabilità di **Z** e **Q** (*). Numerabilità dell'unione e del prodotto cartesiano di insiemi numerabili (*). Sottoinsiemi di insiemi numerabili (*). Potenza del continuo. Non numerabilità di **R** (*). **R** è equipotente a (0,1). Cardinalità dell'insieme delle parti. Cardinalità dell'insieme delle parti di **N** ed equipotenza con **R** (*).

Spazi metrici. Spazi euclidei. Distanze ed intorni in **R,** $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, nello spazio delle funzioni limitate. Altri esempi. Proprietà di Hausdorff (*). Classificazione dei punti: punti interni, esterni, di frontiera; punti isolati, punti di accumulazione e loro caratterizzazione (*). Insieme derivato. Insiemi aperti, insiemi chiusi e loro caratterizzazione (*). Unioni e intersezioni di aperti e di chiusi (*). Chiusura di un insieme. Diametro di un insieme, coincidenza con il diametro della chiusura (*).

Insiemi compatti. Condizioni necessarie per la compattezza (*) e sufficienti. Caratterizzazione degli insiemi compatti. Sottoinsiemi chiusi di compatti sono compatti (*). Famiglie decrescenti di compatti non vuoti hanno intersezione non vuota (*). Teorema di Heine-Borel. Teorema di Bolzano-Weierstrass (*).

R esteso come spazio metrico. Insiemi connessi in uno spazio metrico. Insiemi connessi in **R**.

Definizione di funzione. Immagine e controimmagine. Restrizione.
Funzioni iniettive, inverse, monotone. Composizione di funzioni.

Successioni in spazi metrici. Definizione di successione convergente, limitata e implicazioni (*). Unicità del limite (*). Limitatezza delle successioni convergenti (*). Definizione di successione divergente, oscillante in **R**. Definizione di intorni e convergenza in **R** esteso. Limiti di successioni nella retta estesa. Definizione di successioni convergenti per eccesso e per difetto in **R**. Teorema della permanenza del segno e del confronto per successioni (*). Limite della somma, prodotto, quoziente per successioni regolari. Forme di indecisione. Successioni monotone. Teorema fondamentale per successioni monotone (*). Risoluzione di forme indeterminate nel calcolo di limiti per successioni. Definizione di costante di Nepero *e*. Criterio del rapporto per successioni (*). Confronto tra infiniti ed infinitesimi, relazioni di "asintotico", "o piccolo. Successioni in $\mathbf{R}^k$. Successioni di Cauchy in spazi metrici. Spazi metrici completi. Completezza di $\mathbf{R}^k$. Completezza degli spazi metrici compatti (*). Sottosuccessioni e punti di accumulazione (*). Regolarità delle sottosuccessioni di una successione regolare (*). Classe limite di successioni reali e sue proprietà . Definizione e proprietà di limsup e liminf.

Definizione di serie, carattere di serie. Esempi. Convergenza assoluta. Condizione di Cauchy per le serie (*). Condizione necessaria per convergenza delle serie. Serie a termini reali di segno costante. Criteri del confronto e confronto asintotico per serie a termini positivi (*). Criteri della radice e del rapporto (*) per serie a termini positivi. Teorema di condensazione. Dimostrazione di convergenza di serie armoniche generalizzate. Criterio di Leibniz (*). Convergenza incondizionata. Somma di serie. Proprietà associativa e commutativa per le serie. Teorema di Riemann.

Funzioni tra spazi metrici: definizione di limite ed esempi. Unicità del limite (*). Funzioni reali di variabile reale: definizione di limite nei vari contesti possibili. Funzioni limitate, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo di una funzione. Teoremi della permanenza del segno (*) e del confronto (*). Calcolo dei limiti di funzioni: limiti e operazioni algebriche, limiti e composizione. Limiti notevoli. Confronto tra infiniti ed infinitesimi, relazioni di "asintotico" e "o piccolo" e loro impiego. Asintoti al diagramma di una funzione. Limiti di funzioni e limiti successionali (*). Classe limite di una funzione.

Continuità puntuale e globale di funzioni tra spazi metrici. Caratterizzazione della continuità globale mediante le controimmagine di aperti o chiusi (*). Continuità delle funzioni composte. Continuità delle funzioni reali di variabile reale. Funzioni elementari e continuità. Continuità e operazioni algebriche. Classificazione delle discontinuità di funzioni reali di una variabile reale. Continuità e compattezza (*), teorema di Weierstrass (*). Teorema degli zeri (*), dei valori intermedi (*) e di Darboux (*). Funzioni monotone ed esistenza dei limiti (*). Discontinuità delle funzioni monotone (*). Continuità della funzione inversa di una funzione continua invertibile su un intervallo (*). Uniforme continuità: definizione, teorema di Heine-Cantor (*). Lipschitzianità.

Derivata e differenziale. Continuità delle funzioni derivabili (*). Punti di non derivabilità: punti a tangente verticale, punti angolosi, punti cuspidali. Regole di derivazione. Derivazione della funzione inversa (*) e della funzione composta. Derivate delle funzioni elementari. Massimi e minimi relativi; teorema di Fermat (*). Teoremi di Rolle (*), Cauchy (*), Lagrange (*). Conseguenze del teorema di Lagrange: funzioni con derivata nulla su intervalli (*), segno della derivata e monotonia (*). Criterio di derivabilità mediante il limite della derivata (*). Legame tra limitatezza derivata e uniforme continuità (*). Discontinuità della derivata (*). Teorema di De L'Hospital ((*) solo caso [0/0]).

Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor con resto di Peano (*) e con resto di Lagrange. Unicità dello sviluppo (*). Sviluppi in serie di Taylor per funzioni elementari. Legame tra formula di Taylor e forma esponenziale dei numeri complessi. Convessità, concavità, flessi. Segno della derivata seconda e convessità (*). Confronto con retta tangente e convessità (*). Flesso: definizione; condizione necessaria e sufficiente per esistenza (*). Regolarità delle funzioni convesse: continuità (*). Derivabilità destra e sinistra (*) e infinità numerabile di punti angolosi.

Utilizzo di derivate di ordine superiore al primo per la classificazione di punti interni al dominio (*).