Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta d'esame del 22.04.2010

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:..................... Corso di Laurea: ....

1] *(4 punti)* Le soluzioni della disequazione

$$\sqrt{|x-1|} + |x| < 3$$

sono *(scrivere solo il risultato)* :

2] *(4 punti)* Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$\frac{z^3}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\overline{z}}{i}.$$

Soluzioni (scrivere solo il risultato):

3] *(4 punti)* Sia A l'insieme del piano euclideo così definito

$$A = \left\{ \left(\sin \frac{n\pi}{2} \, , \, 1 - \frac{1}{m} \right) \quad : \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare l'insieme A' e il diametro di A *(scrivere solo il risultato).*

4] *(4+4 punti)* Assegnata la funzione

$$f(x) = (1+x)^{1+1/x}$$

dopo aver determinato il più grande aperto D su cui è definita, stabilire se
a) $f(A)$ è limitato per ogni insieme limitato $A \subset D$;
b) f possiede asintoto per $x \to +\infty$.

(Scrivere uno svolgimento completo)

5] *(5 punti)* Sia $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di numeri positivi, monotona decrescente a zero.

Determinare, se possibile, il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\pi + a_n^2 - a_n\right).$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

6] *(4 punti)* Al variare del parametro reale a, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{na}}{(3n)!}.$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

7] *(4 punti)* Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e X abbia la cardinalità del continuo. Mostrare che (X, d) deve possedere più di un punto di accumulazione.

8] *(3 punti)* *Sia* $\{I_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di intervalli limitati, a due a due disgiunti e tali che $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Per ogni n, sia ℓ_n la lunghezza di I_n. Dimostrare o confutare: *"La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell_n}{n}$ *è divergente".*